$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

(a) Par définition de la partie entière, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$

et donc $\underline{\forall n \quad 0 \leq u_n < 1}$

donc $\underline{(u_n)_n \text{ est bornée}}$

(b) Lorsque n est un carré parfait, u_n vaut 0

Lorsque n est juste un peu plus petit qu'un carré parfait,

la partie entière sera réduite de presque 1 donc u_n sera proche de 1.

Considérons les suites extraites $(u_{p^2})_p$ et $(u_{p^2-1})_p$

- $$u_{p^2} = p - \lfloor p \rfloor = 0 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

- $$u_{p^2-1} = \sqrt{p^2-1} - \left\lfloor \sqrt{p^2-1} \right\rfloor$$

On a $$\underbrace{((p-1)+1)^2 - 1}_{(p-1)^2 \leq (p-1)^2 + 2(p-1)} = p^2 - 1 < p^2$$

donc $p-1 \leq \sqrt{p^2-1} < p$ par croissance de $\sqrt{\ }$.

Ainsi $$\begin{aligned} u_{p^2-1} &= \sqrt{p^2-1} - (p-1) \\ &= p\left[\sqrt{1-\frac{1}{p^2}} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right] \\ &= p\left(1 - \frac{1}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) - 1 + \frac{1}{p}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right) \\ &\xrightarrow[p \to +\infty]{} 1 \end{aligned}$$

- On a trouvé deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, donc $\underline{(u_n)_n \text{ diverge}}$