Pour je : 550.3, 550.4, 550.6

3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

On considère dans ce paragraphe des séries entières de variable réelle.

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

Théorème radial d'Abel.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R]{<} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Si la série numérique $\sum a_n (-R)^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to -R]{>} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$$

Remarque. *Ainsi, la somme d'une série entière de variable réelle est continue là où elle est définie. Au bord de l'intervalle $]-R, R[$, on justifiera ce résultat en appliquant le théorème radial d'Abel.*

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to 1]{<} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Remarque. *Sous l'hypothèse du corollaire, le rayon de convergence est $\geqslant 1$. S'il est > 1, c'est la continuité de la somme. S'il est $= 1$, c'est le théorème radial d'Abel.*

Exemple : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ somme de série entière

$R = 1$

donc f est définie au moins sur $]-1, 1[$
continue au moins sur $]-1, 1[$

Pour $x = 1$ $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc f est définie en 1, et par le th radial d'Abel, f est continue en 1.

Rmq : on peut le justifier directement.

On note $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$

$\forall x \in [-1,1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ indép. de x

↑ tg d'une série convergente

donc $\sum f_n$ cv normalement, donc unif sur $[-1,1]$. Les f_n sont continues sur $[-1,1]$ par transfert de continuité, f est continue sur $[-1,1)$.

Exemple : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

- Somme de série entière $|a_n| = \frac{1}{n}$

  donc $R = 1$

  donc f est continue sur $]-1,1[$

- Pour $x = 1$, la série converge (harmonique alternée)

  donc par le th radial d'Abel,

  f est définie et continue sur $]-1,1]$

Rmq : on peut montrer que $\sum f_n$ cv uniformément sur $[0,1]$ par le th des séries alternées.

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a,b] \subset]-R,R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \,\mathrm{d}t\right)$$

Preuve $\sum a_n t^n$ cv normalement sur $[a,b]$ segment.
en part avec $[a,b] = [0,x]$ pour $x \in]-R,R[$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

on note $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$$= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

$$R = R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^n\right)$$

car $n+1 \sim n$

$$= R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} x^n\right)$$

$$= R\left(\sum_{n\geq 1} a_n x^n\right)$$

On retient : on peut primitiver terme à terme un DSE
on conserve le même rayon de convergence

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad R=1$

pas plus

donc, par primitivation

$\forall x \in]-1,1[\quad 0 + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{S(x)} = -\ln(1-x)$ $\quad R=1$

on l'étend ?

en $x=1$? NON

en $x=-1$? th des séries alternées $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ cv

Par le th radial d'Abel, S est continue en -1

Donc à la limite par $x \xrightarrow{>} -1$

$$S(x) = -\ln(1-x)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$S(-1) \qquad -\ln(2)$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\ln(2)$

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

↑ série entière de rayon de cv R

Preuve : • notons R' le rayon de cv de $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

pour $x \in]-R', R'[\setminus \{0\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$$

de rayon de cv R

donc $R' = R$

• Notons $f_n(x) = a_n x^n$

* $\sum f_n$ cv simplement sur $]-R, R[$

* les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et

$f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ pour $n \geq 1$

$f_0'(x) = 0$

* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est une série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

de rayon de cv $]-R, R[$ donc

uniformément convergente sur tout

$[-a,a] \subset]-R,R[$

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-a,a] \subset]-R,R[$

donc sur $]-R,R[$ et

$$\forall x \in]-R,R[\quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Bref : on peut dériver terme à terme une SE sur $]-R,R[$.

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}x^n \end{aligned}$$

dérivées

x^n

$n x^{n-1}$

$n(n-1)\, x^{n-2}$

$\vdots$

$n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k}$

k termes

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

- f est somme d'une série entière de rayon $R = +\infty$

  (en effet, $\forall x$, $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_n$ bornée)

  donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, +\infty[$

- $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ $\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= f(x)$$

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

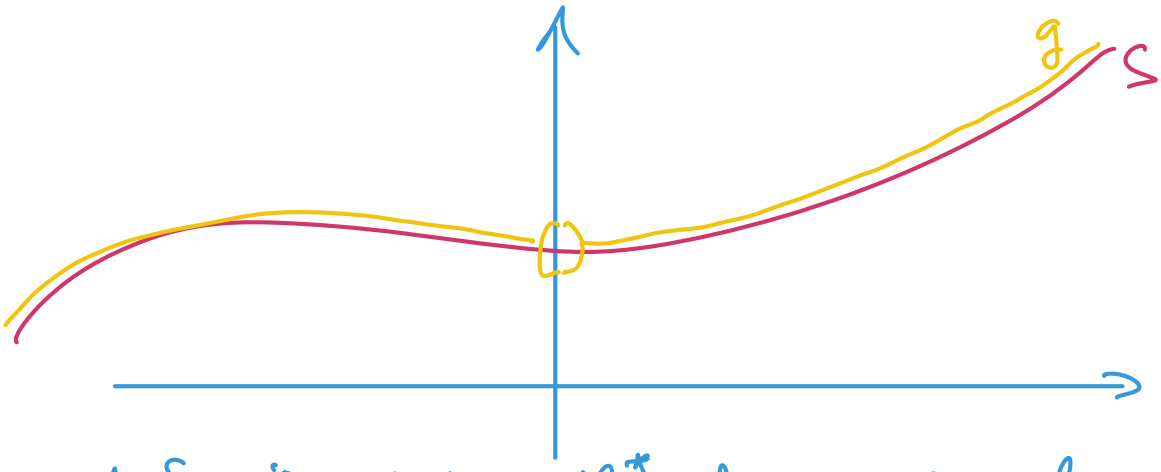
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$

est somme d'une SE, de rayon $+\infty$

donc S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, +\infty[$



g et S coïncident sur $\mathbb{R}^*$, donc g se prolonge à $\mathbb{R}$ en S, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in]-R, R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve : S est somme d'une série entière de rayon R

donc S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[\quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) x^{n-k}$$

donc $S^{(k)}(0) =$ le terme constant dans la somme précédente

$= a_k \, k(k-1)\dots(k-k+1)$

$= a_k \, k!$

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$

$\sum a_n x^n$ — $S \in R$ → $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$f(x)$ est-ce qu'il existe $(a_n)_n$

tq $\forall x \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r,r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r,r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

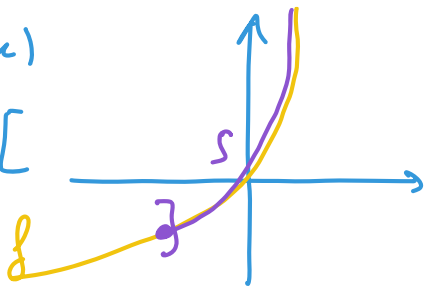
notée $S(x)$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* **au voisinage de** 0 *ou* **en** 0.

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R,R[$ ou $[-R,R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

$f(x) = -\ln(1-x)$

$D_f =]-\infty, 1[$



$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$D_S = [-1, 1[$

Proposition. Si f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors il est unique.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

Preuve : On suppose que f est développable en SE.

$\exists (a_n)_n,\ R>0$ tq $\forall x \in]-R,R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Si f paire, $\forall x \in]-R,R[\quad f(-x) = f(x)$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

par unicité du développement en série entière

$\forall n \quad a_n (-1)^n = a_n$

donc $\forall n = 2p+1 \quad a_{2p+1} = 0$

Parenthèse

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ ← c'est une série entière

Si $R>0$, on note $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

↑ Somme de la série de Taylor de f.

$f(x) \neq T(x)$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r,r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*
Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

Preuve On suppose f développable en SE.

donc $\exists (a_n)_n, R>0$ tq $\forall x \in]-R,R[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
noté $S(x)$

par ce qui précède : $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ car f et S coïncident autour de 0.

donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = T(x)$

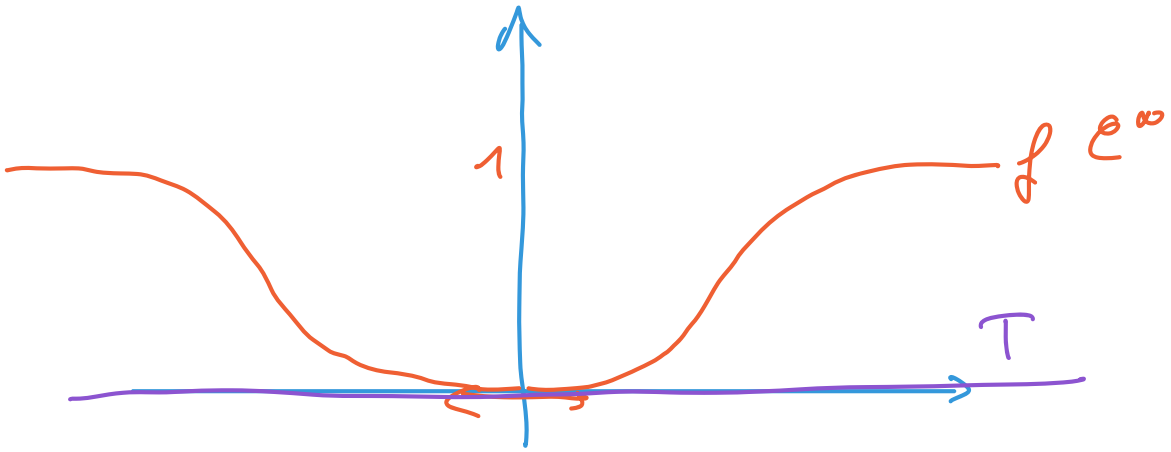
La vraie question est : est-ce que f admet un développement en SE ?

f $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas une C.S.

Exemple : $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

on a montré que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$



$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \, x^n$$

$$\neq f(x)$$

fin de la parenthèse

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\sum c_n x^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :
$$\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :
$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

Exemple $x \mapsto e^x$ admet un dév en SE, $R = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$x \mapsto e^{-x}$ admet un DSE $R = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Donc, par CL, ch admet un DSE

de rayon $R \geqslant \min(+\infty, +\infty)$

ie $R = +\infty$

et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + (-1)^n\right) \frac{x^n}{n!}$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$$

$R = +\infty$

de même

$$\operatorname{sh} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

$R = +\infty$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et son développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

n termes

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\frac{\alpha}{1} \qquad \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \qquad \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} \quad \dots$$

$\times \frac{(\alpha-3)}{4}$

$\alpha \neq 0$ • On pose $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$$

donc $(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$

donc f est sol. de l'ED $(1+x)y' - \alpha y = 0$ (E)

et f satisfait la cond initiale $f(0) = 1$

• Cherchons ds sol de (E) somme de SE.

On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R

Analyse

On suppose $R > 0$

Alors $\forall x \in]-R, R[\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

S sol de $(E) \iff \forall x \in]-R, R[\quad (1+x) S'(x) - \alpha S(x) = 0$

$\iff \forall x \in]-R, R[\quad (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall x \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

glissement d'indice

$\iff \forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$n=1$ ~~$n=0$~~

$\iff \forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n \right] x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \, x^n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n = 0$

par unicité des coefficients SE

$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{(\alpha - n)}{(n+1)} a_n$

Synthèse

poser $a_0 = 1$

$\forall n \quad a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{(n+1)} a_n$

et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc, par la règle de d'Alembert, $R = 1 > 0$

Donc, par le calcul précédent, S sol de (E) sur $]-1, 1[$

et comme $S(0) = a_0 = 1$

Donc par le th de Cauchy-linéaire,
(unicité des sol d'une E.D avec cond initiales)

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = S(x)$$

Donc $\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- Que vaut a_n ?

$$a_n = \frac{(\alpha - n + 1)}{n} a_{n-1}$$

$$= \frac{(\alpha - n + 1)}{n} \cdot \frac{(\alpha - n + 2)}{n-1} \cdots \frac{\alpha}{1} a_0$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,1$$

- **Remarque**

En toute rigueur, si $\alpha \in \mathbb{N}$, ce qui précède est pas valable car $a_n = 0$ $\forall n > \alpha$ donc la règle de d'Alembert ne peut s'appliquer.
Dans ce cas, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$

- **Remarque**

certains considèrent $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ comme un coefficient binomial. NON.

Enfin si, si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exemple : F50.6

DSE $\operatorname{Arccos}(x)$

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1,1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$*, mais son développement en série entière sur* $]-1,1[$ *(ou peut-être* $[-1,1]$*, mais pas plus).*

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$