Pour moi : 550.20, 550.21

Séries entières

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série de fonctions ? Différents modes de convergence ?
2. Lien entre suite convergente et suite bornée ?
3. Lien entre $\sum u_n$ convergente et (u_n) bornée ?
4. Qu'est-ce que la convergence absolue d'une série numérique ?
   Lien entre convergence absolue et convergence ?
5. Qu'est-ce qu'un produit de Cauchy ?
6. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$? Pour quels x ?
7. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Pour quels x ?
8. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$? Pour quels x ?
9. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n/2}}$?
10. Qu'est-ce que la règle de D'Alembert ?
11. Condition nécessaire (ou suffisante ?) pour que la somme S d'une série de fonctions soit continue sur I ?
    Idem pour dériver S ?
12. Formule de Taylor avec reste intégral ?
13. Développements limités en 0 des fonctions usuelles (exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, Arctan).

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*
Lorsque $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.
Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

$f_n(z)$ $\qquad$ $f_n(x)$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ $\quad a_n \in \mathbb{C}$ $\qquad$ / $\qquad$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ $\quad a_n \in \mathbb{R}$

z parcourt $\mathbb{C}$ $\qquad$ x parcourt $\mathbb{R}$

une série entière est une série de fct particulière

$\forall n \quad f_n(x) = a_n x^n$

$\sum f_n(x)$ cv ou diverge $\qquad$ (convergence simple)

domaine de déf de la somme ? ie pour quels x $\sum f_n(x)$ cv ?

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

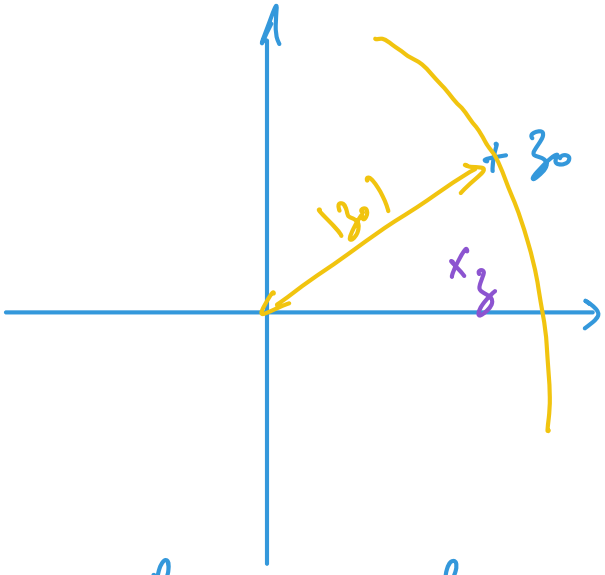
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \text{Sup}\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est infini (resp. nul, resp. égal à 1).



ndép de n

Preuve: par hyp, $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z_0^n| \leq M$.

Mque $\sum a_n z^n$ cv absolument

On $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

$\leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

↑ tq série géométrique converge

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument.

Définition $E = \{\rho \geq 0 \text{ tq } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (contient 0)

Si elle est bornée, elle admet un sup, noté R

Sinon, on pose $R = +\infty$.

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

- Si $|z| < R$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Preuve : • Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R = \sup E$

donc $\exists \rho \in E$ tq $|z| < \rho$ (par déf de Sup)

par le lemme d'Abel (avec $z_0 = \rho$)

$\sum a_n z^n$ cv absolument.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| > R$

alors $|z| \notin E$ donc $(a_n |z|^n)_n$ non bornée

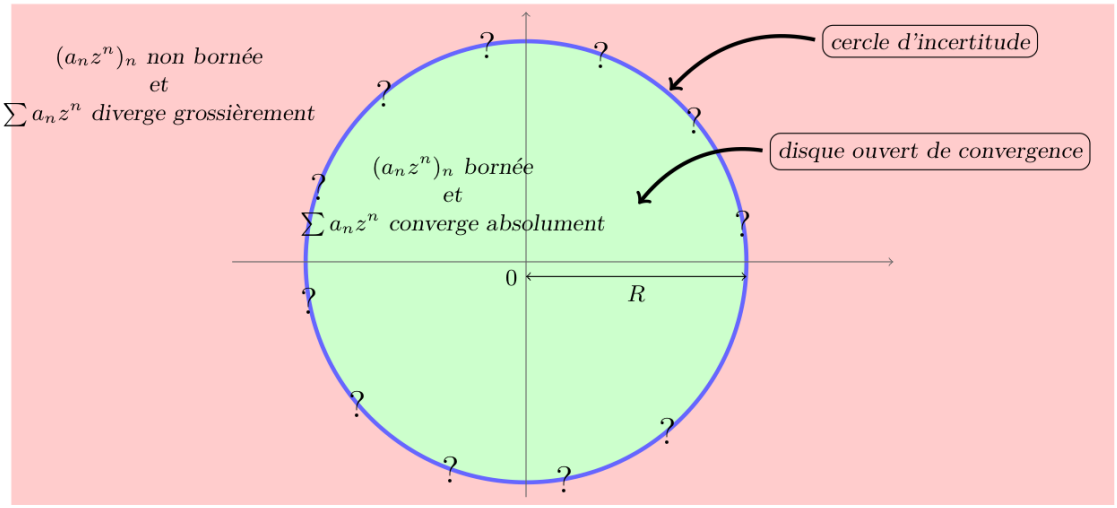
donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

↑ c'est une histoire de taille.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0,R)$ la **somme** de la série entière : $S : D(0,R) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Le cercle $C(0,R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Rmq : si z_0 est tq $(a_n z_0^n)_n$ bornée, alors $R \geq |z_0|$

si z_0 est tq $\sum a_n z_0^n$ cv alors, $R \geq |z_0|$

"z_0 n'est pas rouge"

si z_0 est tq $(a_n z_0^n)$ non bornée alors $R \leq |z_0|$

si z_0 est tq $\sum a_n z_0^n$ non cv alors $R \leq |z_0|$

"z_0 n'est pas vert"

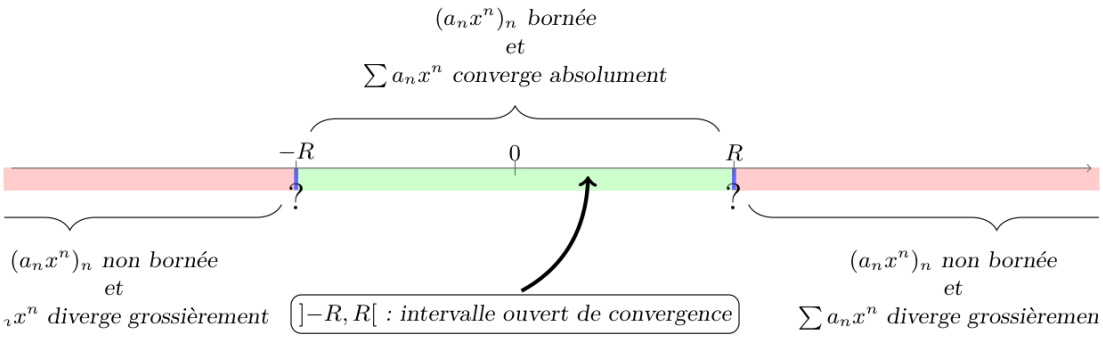
Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

$$]-R,R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R,R[$ la **somme** de la série entière :

$$\begin{array}{rccc} S\ :\ ]-R,R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

M1 : $E = \{ \rho \geq 0 \text{ tq } \left(\frac{\rho^n}{n}\right)_n \text{ bornée} \}$

$= [0,1]$ si $\rho \leq 1$, limite nulle

si $\rho > 1$, limite infinie

donc $R = \sup(E) = 1$

M2 • Si $|z| < 1$, $\frac{z^n}{n} = o(z^n)$ ← tq série géom. converge

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument

z n'est pas rouge donc $|z| \leq R$

ceci est vrai $\forall |z| < 1$ donc $1 \leq R$

• Si $|z| > 1$, $\left|\frac{z^n}{n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

z n'est pas noir donc $R \leq |z|$

ceci est vrai $\forall |z| > 1$, c'est que $R \leq 1$

• Bref : $R = 1$

M3 On remarque que

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (-1) n'est pas rouge

non absolument convergente (-1) n'est pas noir

donc $R = |-1| = 1$

Rq On remarque que

$\sum \frac{1^n}{n}$ diverge 1 n'est pas vert

$\left(\frac{1^n}{n}\right)_n$ bornée 1 n'est pas rouge

donc $R = 1$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Exemple de référence. On a :

$$R\Big(\sum n^{\alpha} z^n\Big) = 1 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

Exemple de rif

1er cas : $\alpha < 0$

$(n^{\alpha} z^n)_n$ est bornée ssi $|z| \leq 1$

donc $E = [0,1]$ donc $R = 1$

2e cas $\alpha > 0$

$(n^{\alpha} z^n)_n$ est bornée ssi $|z| < 1$

donc $E = [0,1[$ donc $R = 1$

3e cas $\alpha = 0$

$(z^n)_n$ est bornée ssi $|z| \leq 1$

donc $E = [0,1)$ et $R = 1$

Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ cv absolument

alors $\sum u_n$ cv absolument

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geq R_b$

Preuve (112) • On suppose $a_n = O(b_n)$

ie $\exists$ $a_n z^n = O(b_n z^n)$

donc Si $|z| < R_b$ alors $\sum b_n z^n$ cv abs

donc $\sum a_n z^n$ cv abs

donc z n'est pas rouge pour $\sum a_n z^n$

donc $|z| \leq R_a$

ceci est vrai $\forall |z| < R_b$ donc $R_b \leq R_a$

(112) on peut revenir à la déf $R_a = \sup E_a$ ...

• conséquence directe du 1er point.

• Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $a_n = O(b_n)$

et $b_n = O(a_n)$

donc $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

• Étude de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$

$a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \dfrac{1}{n^2} z^n\right)$

$= 1$

• Étude de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \ln(1+n)$

$a_n = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$\sim \ln(n)$

$0 < 1 \leq a_n \leq n$ $\forall n$

donc $R\left(\sum_{\| \; 1} z^n\right) \geq R\left(\sum a_n z^n\right) \geq R\left(\sum_{\| \; 1} n z^n\right)$

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.*
Voir aussi au § 3.5 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.

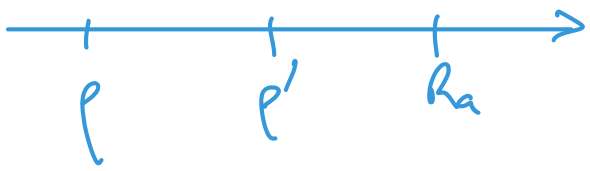
Preuve: On note $b_n = n a_n$

- $\forall n \geq 1, \quad |b_n| = n|a_n|$
$\geq |a_n|$

donc $R_b \leq R_a$

- Soit $\rho < R_a$

Mq $(n a_n \rho^n)_n$ est bornée



Soit ρ' tq $\rho < \rho' < R_a$ (par ex $\rho' = \frac{\rho + R_a}{2}$)

On a donc $(a_n \rho'^n)_n$ est bornée par déf de R_a.

Ainsi

$$n a_n \rho^n = \underbrace{a_n \rho'^n}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{n \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n}_{\to 0 \text{ vite}}$$

donc $(n a_n \rho^n)_n$ est bornée

donc $\rho \leq R_b$

ceci est vrai $\forall \rho \leq R_a$ on a donc $R_a \leq R_b$

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Remarque.

- *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*
- *Lorsque $\ell = +\infty$, $R = 0$; lorsque $\ell = 0$, $R = +\infty$.*
- *Lorsque la suite $(a_n)_n$ s'annule, on peut envisager d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.*
- *Souvent, la détermination du rayon de convergence peut se faire sans utiliser la règle de d'Alembert.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

Preuve: On suppose $a_n \neq 0$ à partir d'un rang et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$

On s'appuie sur la règle de d'Alembert des séries numériques.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ fixé.

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell |z|$$

1er cas si $\ell |z| < 1$ i.e. $|z| < \frac{1}{\ell}$

alors $\sum a_n z^n$ cv absolument.

donc $R \geq |z|$ vrai $\forall |z| < \frac{1}{\ell}$

donc $R \geq \frac{1}{\ell}$

2e cas Si $\ell|z| > 1$ ie $|z| > \frac{1}{\ell}$

alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

donc $R \leq |z|$ vrai $\forall |z| > \frac{1}{\ell}$

donc $R \leq \frac{1}{\ell}$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

- On note $a_n = \frac{n!}{n^n} \neq 0$ th. On applique la règle de d'Alembert.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

$$= (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \text{au voisin de } n \to +\infty$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{-1}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1}$$

donc $R = \frac{1}{e^{-1}} = e$

- $\sum \frac{z^{2p}}{p^2+1}$

c'est une série entière où $a_n = \begin{cases} \frac{1}{p^2+1} & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

(R1) règle de d'Alembert pour les séries numériques,

à $z \neq 0$ fixé.

$$\left| \frac{\frac{z^{2p+2}}{(p+1)^2+1}}{\frac{z^{2p}}{p^2+1}} \right| = \frac{p^2+1}{p^2+2p+2} |z|^2$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} |z|^2$$

- Pour $|z|^2 < 1$ ie $|z| < 1$, $\sum b_p z^{2p}$ cv absolument
- Pour $|z|^2 > 1$, ie $|z| > 1$, $\sum b_p z^{2p}$ div grossièrement

donc $R = 1$

$\sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$

$$R\left(\sum \frac{n}{2^n} z^{3n}\right) = R\left(\sum \frac{1}{2^n} z^{3n}\right)$$

On $\frac{1}{2^n} z^{3n} = \left(\frac{z^3}{2}\right)^n$ géométrique

donc $\sum \frac{1}{2^n} z^{3n}$ cv $\Leftrightarrow$ ssi $\left|\frac{z^3}{2}\right| < 1$

ie $|z| < \sqrt[3]{2}$

Donc $R = \sqrt[3]{2}$

$\sum \sin(n) z^n$

idée 1 $\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin(n)}\right|$ n'a pas de limite ...

idée 2 $\sum \sin(n) x^n = \mathrm{Im}\left(\sum (e^{ix})^n\right)$

$\sum \sin(n) x^n$ cv $\Leftarrow$ $\sum (e^{in})^n$ cv

idée 3 $(\sin(n)\rho^n)_n$ bornée pour $0 \leq \rho < 1$

donc $R \geq 1$

$\sin(n) \not\to 0$

donc $\sum \sin(n) 1^n$ diverge grossièrement

donc $R \leq 1$

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.2 Somme de deux séries entières

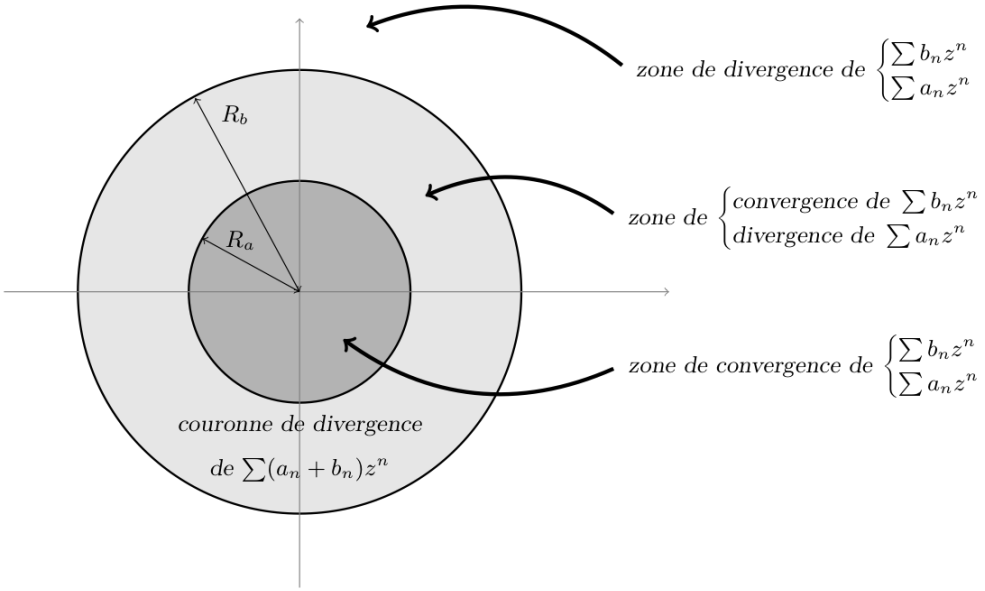
Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.



Exemple. Donner un exemple de deux séries entières pour lesquelles $R > R_a = R_b$

Preuve : On suppose $R_a < R_b$. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+$

- Si $\rho < R_a$, $(a_n \rho^n)_n$ bornée

  et $(b_n \rho^n)_n$ bornée car $\rho < R_b$

  donc $((a_n + b_n)\rho^n)_n$ bornée.

  Ainsi $R_a \leqslant R_{a+b}$

- Si $R_a < \rho < R_b$, $(a_n \rho^n)_n$ non bornée

  $(b_n \rho^n)_n$ bornée

donc $((a_n+b_n)\rho^n)_n$ non bornée.

Ainsi $R_{a+b} \leq R_a$

Cas où $R_a = R_b$

Pour $\rho < R_a = R_b$, $((a_n+b_n)\rho^n)_n$ bornée

Ainsi $R_{a+b} \geqslant R_a = R_b$

mais l'inégalité peut être stricte

Exemple On pose $a_n = 1$

$$b_n = -1 + \frac{1}{2^n}$$

$$a_n + b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$R_a = R\left(\sum z^n\right) = 1$$

$$R_b = R\left(\sum \left(-1+\frac{1}{2^n}\right) z^n\right) \qquad \left|\frac{-1+\frac{1}{2^{n+1}}}{-1+\frac{1}{2^n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$= 1$$

$$R_{a+b} = R\left(\sum \frac{1}{2^n} z^n\right)$$

$$= 2 \qquad \text{car } \sum \left(\frac{z}{2}\right)^n \text{ géométrique}$$

Déf $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ 2 séries numériques.

le produit de Cauchy est $\sum_{n\geq 0} w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ $= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$

Th Si $\sum u_n$ $\sum v_n$ ($a_n z^n$, $b_n z^n$) cv absolument

alors $\sum w_n$ cv absolument

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

- On note, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 1$
- Par définition le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ avec $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} 1$

$= (n+1)$

- $R\left(\sum z^n\right) = 1$

donc $R\left(\sum c_n z^n\right) \geq 1$

(en fait, c'est $R\left(\sum (n+1) z^n\right)$

$= R\left(\sum n z^n\right)$ car $n+1 \sim n$

$= R\left(\sum z^n\right)$

$= 1$)

et on a, pour $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2}$$

Rmq $\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

- $\sum f_n$ cv simplement sur I

  signifie $\forall x \in I$ fixé, $\sum f_n(x)$ cv

- $\sum f_n$ cv normalement sur I

  signifie $\sum \|f_n\|_\infty$ cv

- $\sum f_n$ cv uniformément sur I

  signifie $\begin{cases} \sum f_n \text{ cv s implement} \\ R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{cv unif}} (x \mapsto 0) \end{cases}$

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.

Théorème.

$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-A, A] \subset]-R, R[$.

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n, \sum \frac{x^n}{n}, \sum \frac{x^n}{n^2}$$

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Attention pas de cv normale ou uniforme sur $]-R, R[$ en général.

Preuve :

$\forall x \in [-A, A]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| A^n$

↑ indépendant de x

tq série cv car $A < R$

$\sum \| x \mapsto a_n x^n \|_\infty^{[-A,A]}$ cv

donc $\sum a_n x^n$ cv normalement sur $[-A, A]$

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

Preuve : On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$

- les f_n sont continues sur $]-R, R[$
- $\sum f_n$ cv normalement sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

par transfert de continuité,

$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur tout

$[-A, A] \subset]-R, R[$ donc sur $]-R, R[$

3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

On considère dans ce paragraphe des séries entières de variable réelle.

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

Théorème radial d'Abel.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R]{<} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

$S(x) \xrightarrow[x \to R]{<} S(R)$

Si la série numérique $\sum a_n (-R)^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to -R]{>} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$$

Remarque. *Ainsi, la somme d'une série entière de variable réelle est continue là où elle est définie. Au bord de l'intervalle $]-R, R[$, on justifiera ce résultat en appliquant le théorème radial d'Abel.*

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to 1]{<} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Remarque. *Sous l'hypothèse du corollaire, le rayon de convergence est $\geqslant 1$. S'il est > 1, c'est la continuité de la somme. S'il est $= 1$, c'est le théorème radial d'Abel.*

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a,b] \subset]-R,R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \,\mathrm{d}t\right)$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in \left]-\rho, \rho\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$