Pour ma : 660.4, 660.11, 660.16

$F : x \mapsto \int_I h(x,t)\,dt$

2 Dérivation

Remarque. *Étudier les variations d'une fonction f, c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x,t)$ et $h(y,t)$.*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$$

définie sur $]0,+\infty[$

Si $0 < x \leq y$

$\forall t \in]0,+\infty[$ $\quad \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \geqslant \frac{e^{-yt}}{\sqrt{t+1}}$

$F(x) \geqslant F(y)$

2.1 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\begin{array}{rccc} h : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de* $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.

Remarque. *L'intégrabilité de* $t \mapsto h(x,t)$ *est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.*

Exemple. On reprend $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $t \in [0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}$

Appliquons le th de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre :

- $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ $\forall x$

  car * $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ continue (par rapport à x) sur $[0,+\infty[$

  * Au voisinage de $+\infty$ $e^{-t^2}\cos(xt) = o(e^{-t})$

- $x \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ $\forall t$

  et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t\,e^{-t^2}\sin(xt)$

- Domination !

  $\forall t \in [0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$

  $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\,e^{-t^2}$ indépendante de x

  $\uparrow$ noté $\varphi(t)$

  φ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car :

  * φ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$

  * au voisin de $+\infty$

  $\varphi(t) = t e^{-t^2} = o\left(e^{\frac{t}{2}}\right) o(e^{-t})$

  $= o\left(e^{-t/2}\right)$

  intégrable en $+\infty$

Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt)\, dt$$

(dérivée de $\sin(xt)$ par rapport à x)

Par parties, sous réserve de limites finies des crochets

$$f'(x) = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{t \to +\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{-t^2} x \cos(xt)\, dt$$

$$= 0 - \frac{1}{2} x f(x)$$

Donc f est sol de l'éq. différentielle

$$y' + \frac{1}{2} x y = 0$$

ED linéaire d'ordre 1, homogène

$$\int \frac{1}{2} x\, dx = \frac{1}{4} x^2 + \text{cste}$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

Et $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Donc $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Exemple. Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

On applique le th de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre :

On note $h(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$ pour $t \in]0,1[$, $x > -1$

- $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ car : pour $x > -1$
  - $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$ continue (par morceaux) sur $]0,1[$
  - Au voisinage de $t \to 0$

$$h(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} \cdot \frac{1}{t^{-x}}$$

$$\sim \frac{-1}{\ln t} \frac{1}{t^{-x}}$$

$$= o(1) \frac{1}{t^{-x}}$$

$$= o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \text{ où } -x < 1$$

$\uparrow$ intégrable en 0

$\frac{1}{t^\alpha}$ intég en 0 $\hookrightarrow \alpha < 1$

  - Au voisinage de $t \to 1$ $\quad t = 1-\delta$ où $\delta \to 0$

$$h(x, 1-\delta) = \frac{-\delta}{\ln(1-\delta)} (1-\delta)^x$$

$$\sim \frac{-\delta}{-\delta} 1$$

$$\xrightarrow[\delta \to 0]{} 1$$

donc $t \mapsto h(x,t)$ se prolonge par continuité en 1,

donc est intégrable en 1.

- $x \mapsto h(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x = \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$

et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (t-1) e^{x \ln t} = (t-1) t^x$

- Domination:

$\forall t \in]0,1[\quad \forall x \in [a, +\infty[\subset]-1, +\infty[$

$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| = (1-t) t^x$

$\leq \underbrace{(1-t) t^a}_{\varphi(t)}$ indép de x

et φ est intégrable sur $]0,1[$ car :

* continue (par ouvert) sur $]0,1[$
* au voisinage de 0, $\varphi(x) \sim \frac{1}{t^{-a}}$

où $-a < 1$

* au voisinage de 1 $\varphi(t) \to 0$

donc φ se prolonge par continuité

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[\subset]-1, +\infty[$

donc sur $]-1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)\, t^x \, dt$$

$$= \int_0^1 t^{x+1} - t^x \, dt$$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x+2} t^{x+2} - \frac{1}{x+1} t^{x+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Donc $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C$

- Déterminons C $\qquad f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$

en étudiant la limite, pour $x \to +\infty$, de $f(x)$.

* $\forall t \in]0,1[$, $\frac{t-1}{\ln t} t^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ← c'est $\ell(t)$

* Domination !

$\forall t \in]0,1[$ $\quad \forall x \geq 0$ ← il faut pouvoir aussi $x \to +\infty$

$$\left| \frac{t-1}{\ln t} t^x \right| \leq \underbrace{\frac{t-1}{\ln t}}_{\varphi(t)} \cdot 1 \quad \text{indép. de } x$$

- φ est continue par morceaux sur $]0,1[$
- au voisinage de $t \to 0$ $\varphi(t) = o(1)$
- au voisinage de $t \overset{<}{\to} 1$

$$\varphi(1-\delta) = \frac{-\delta}{\ln(1-\delta)} \underset{\delta \to 0}{\sim} 1$$

donc φ intégrable en 1.

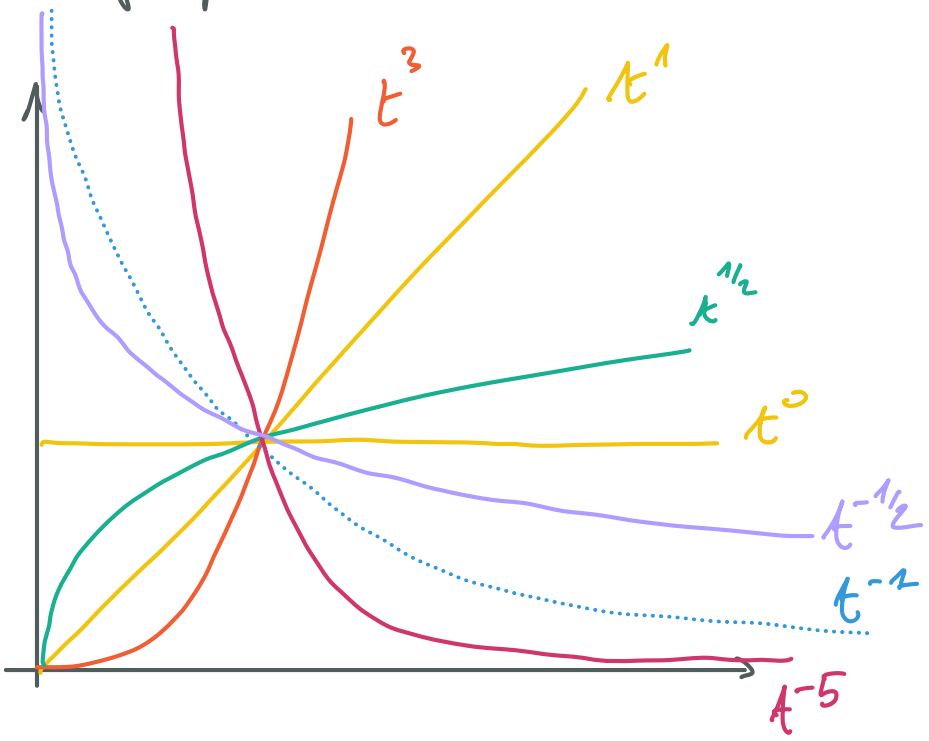
Par convergence dominée, $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 0 \, dt$

$= 0$

Or $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + C \xrightarrow[n \to +\infty]{} C$ donc $\underline{C = 0}$

CL : $\forall n > -1$, $f(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

Parenthèse : les fcts puissances !



$t^x \lesssim t^{-1}$ $\quad \forall t \in]0,1[$

$t^x = e^{x \ln t}$ où $\ln t < 0$

$\lesssim e^{-1 \ln t}$ car $x > -1$

$= \frac{1}{t}$

2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$

En itérant le théorème de dérivation k-fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur A ;
- pour tout $p \in \{0, \dots, k-1\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est **intégrable** sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut justifier les intégrabilités du deuxième point en dominant les* $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}$.

$f(x) = \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ $\quad \mathcal{C}^k$?

- $x \mapsto h(x,t)$ en $\mathcal{C}^k$ et on calcule
  - $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dots$
  - $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dots$
  - $\vdots$
  - $\dfrac{\partial^{k-1} h}{\partial x^{k-1}}(x,t) = \dots$
  - $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = \dots$
- Intégrabilité des 1^{ers} dimi partielles sur I
- Domination

2.3 Extension à la classe $\mathcal{C}^\infty$

Remarque. *La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, ce qui se justifie par le théorème précédent en vérifiant :*

- *l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$;*
- *la classe $\mathcal{C}^\infty$ de $x \mapsto h(x,t)$, et le calcul de $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$;*
- *l'hypothèse de domination pour chaque $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$.*

L'incontournable fonction Γ

660.2

On pose, pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $]0,+\infty[$:

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

~~(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.~~

(d) Démontrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$

(a) . $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (par mcx) sur $]0,+\infty[$

. Au voisinage de 0

$$e^{-t}t^{x-1} \sim 1.\frac{1}{t^{1-x}}$$ intégrable en 0 pour $1-x<1$ ie $x>0$

. Au voisinage de $+\infty$

$$e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}\,o(e^{t/2})$$
$$= o(e^{-t/2})$$ intégrable en $+\infty$

(b) On calcule pour $x>0$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x}\,dt$$

par parties, sous réserve de limite finie des crochets

$$= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\,x\,t^{x-1}\,dt$$

$$= x\,\Gamma(x)$$

Remarque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

$= (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$

$\vdots$

$= (n-1)(n-2)\cdots 1.\Gamma(1)$

$= (n-1)!$

(d) • $\forall t$, $x \mapsto h(x,t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} e^{(x-1)\ln t}$

$\uparrow A e^{\lambda x}$

et C^∞ sur $]0,+\infty[$ et

$\forall k$ $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}$ par récurrence

• Domination

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$

$e^{(x-1)\ln t}$

$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \right| = |\ln t|^k e^{-t} t^{x-1}$

à savoir

$\leq \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \\ |\ln t|^k e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t < 1 \end{cases}$

↗ indépendante de x

noté $\varphi(t)$

Montrons que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$

* φ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
* Au voisinage de $t \to +\infty$

$$\varphi(t) = |\ln t|^k e^{-t} t^{b-1}$$
$$= o\left(e^{\frac{1}{4}t}\right) e^{-t} \, o\left(e^{\frac{1}{4}t}\right)$$
$$= o\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$ intégrable en $+\infty$

* Au voisinage de $t \to 0$

$$\varphi(t) = |\ln t|^k e^{-t} t^{a-1}$$
$$= |\ln t|^k e^{-t} \frac{1}{t^{1-a}}$$
$$= \underbrace{t^{\frac{a}{2}} |\ln t|^k}_{\substack{o(1) \\ t \to 0}} \underbrace{e^{-t}}_{O(1)} \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$$
$$= o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$$ avec $1 - \frac{a}{2} < 1$

intégrable en 0.

Remarque Γ est convexe

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \, e^{-t} \, t^{x-1} \, dt$$

$$\geq 0$$

Remarque: On trouve parfois pour fonction dominante :

$$\varphi(t) = \max\left(|\ln t|^k e^{-t} t^{a-1}, |\ln t|^k e^{-t} t^{b-1} \right)$$

C'est nul !

