Pour les : 660.1, 660.5 (a,b)
541.12, 541.14

+ exos à rédiger.

Intégrales à paramètre

$\int_0^1 f(t)\,dt$ $\quad$ f continue par morceaux.

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $\quad$ f continue par morceaux

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ $\quad$ f cpm.

$F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$ (paramètre)

F continue ?

F dérivable ?

F'(x) ?

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_I f(x,t)\,dt \overset{?}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

$$I(x) = I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(n,t)\,dt$$

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\begin{array}{rccc} h : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

indépendante de t

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème.*
L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.
Ce théorème se généralise aux cas où A est une partie de $\mathbb{C}$, ou d'un autre espace vectoriel normé.

$f(x) = \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$

t variable d'intégration

t varie dans I ens d'intégration

x paramètre

x varie dans A

f continue en x ← h continue en x ← hyp. Hâ 1

hyp 2 : domination

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Déterminer le domaine de définition de f, c'est chercher les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale existe / est convergente.

- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
  ↑ intégrabilité en $+\infty$

  Au voisinage de $t \to +\infty$

  $$e^{-t^2}\cos(xt) = e^{-t^2}\,O(1)$$
  $$= O(e^{-t}) \quad \text{car } e^{-t^2} \underset{+\infty}{\ll} e^{-t}$$
  ↑ intégrable en $+\infty$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge.

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$

- **Étude de continuité**

  On note $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $t \in [0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}$

  * $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\quad \forall t \in [0,+\infty[$
  * Dominons !

$$|h(x,t)| = e^{-t^2} |\cos(xt)|$$
$$\leq e^{-t^2}$$

↑ indépendante de x

intégrable sur $[0, +\infty[$ là où t varie (étude vue avant)

Par le th de continuité des intégrales à paramètre

$$x \longmapsto f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- Existence de $f(x)$ (ici : Mq $]0,+\infty[\subset D_f$)

Soit $x>0$ fixé.

+ $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$ continue (par ouvert) sur $]0,+\infty[$

* Au voisinage de $t \to +\infty$

$$\frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t} = e^{-xt}\,O(1) \times \frac{1}{x\sqrt{t}+t}$$

$$= e^{-xt}\,O(1).\,o(1)$$

$$= o(e^{-xt})$$

↑ intégrable en $+\infty$ car $x>0$

* Au voisinage de $t \to 0$

$$\frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t} \sim \frac{1.\,t}{x\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{x}$$

intégrable en 0 car prolongeable par continuité

- Étude de la continuité $x \in]0,+\infty[$

On note $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$ $\forall t \in]0,+\infty[, \forall x \in]0,+\infty[$

* $x \longmapsto h(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ $\forall t \in]0,+\infty[$

* Domination !

Pour $x \in [a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et $t \in]0,+\infty[$ (variable d'intégration)

$$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}\,|\sin t|}{x\sqrt{t}+t}$$

$$\leq \frac{1 \cdot |\sin t| \cdot 1}{0+t}$$ indép de x

$\frac{1}{\sqrt{t}}$: pas intégrable sur $]0,+\infty[$

$$\leq \frac{e^{-at}\cdot 1}{a\sqrt{t}}$$ indép. de x

intégrable sur $]0,+\infty[$ car :

* au voisinage de $+\infty$, $o(e^{-at})$

* au voisinage de 0 $\sim \frac{1}{a t^{1/2}}$

Conclusion :

$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,dt$ est continue sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ donc continue sur $]0,+\infty[$

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A éventuellement infinie et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

$$\lim_{x \to a} \int_I h(x,t)\,dt \overset{?}{=} \int_I \lim_{x \to a} h(x,t)\,dt$$

Preuve : revenir au th de convergence dominée (suites de fct)

par caractérisation séquentielle de la limite.

Rappel $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall (x_n)_n$ suite tq $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$,

on a $f(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

$\Rightarrow$ ben oui ! composition

$\Leftarrow$ discrétisation

Soit $(x_n)_n$ suite d'éléments de A qui a pour limite a

$$f(x_n) = \int_I \underbrace{h(x_n,t)}_{f_n(t)}\,dt$$

On applique le Th de cv dominée.

* Convergence simple

Soit $t \in I$

$$f_n(t) = h(x_n, t)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(t) \quad \text{par comp. de limite}$$

donc $(f_n)_n$ cv simplement vers ℓ sur I.

* Domination.

$\forall t \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| = |h(x_n, t)|$$

$$\leq \varphi(t) \quad \text{par hyp}$$

↑ indep de n, intégrable sur I

Donc par cv dominée, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I \ell(t)\,dt$

Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_n$ de limite a, c'est que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,dt.$$

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

- Existence de $f(x)$?

Soit $x \in \mathbb{R}$

* $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$
* Au voisinage de $t \to +\infty$

si $x > 0$: $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} = o(e^{-xt})$ intégrable en $+\infty$

si $x = 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \sim \dfrac{1}{t^{1/2}}$ non intégrable en $+\infty$ et de signe constant, l'intégrale diverge

si $x < 0$: $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} > 0$ ↑ non intégrable en $+\infty$.

Donc $D_f =]0,+\infty[$

- Limite pour $x \to +\infty$

* Soit $t \in [0,+\infty[$ fixé

$]0,+\infty[$

$$h(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On note $\ell(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

* Domination !

$\forall t \in [0, +\infty[\quad \forall x \in [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$

$$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$$

$$\leq \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}}$$ indép de x

intégrable sur $]0, +\infty[$ (cf ci-avant)

Par convergence dominée à paramètre continu

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} l(t)\, dt = 0$$

Remarque : limite pour $x \to 0$? pas de domination possible

• Recherche d'un équivalent

On engage une intégration par parties, sous réserve de limite finie des crochets

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+1}}\, dt$$

$$= \underbrace{[\quad]}_{\text{équivalent}} - \underbrace{\int}_{o(\text{équivalent})}$$

$\downarrow$ doit tendre vers 0 pour $x \to +\infty$

à x fixé

$$= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}} \right]_0^{t \to +\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{x} e^{-xt} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(t+1)^{3/2}} \, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{(t+1)^{3/2}} \, dt}_{g(x)}$$

$$g(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(1) \ ?$$

Par convergence dominée à paramètre continu, avec une domination comme ci-dessus, $\forall x \in [a, +\infty[$ $\quad |\ | \leq \frac{e^{-at}}{(t+1)^{3/2}}$

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

Ainsi au voisinage de $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} o(1)$$

$$= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

- Équivalent pour $x \to 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

on pose $u = xt$
$du = x\,dt$
t de 0 à $+\infty$
u de 0 à $+\infty$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}}\,\frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\,du}_{x \to 0\ ?}$$

On note $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\,du$

* à u fixé, $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$

* Domination :

$\forall u \in]0,+\infty[,\ \forall x > 0$

$$\left|\frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\right| = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

indép. de x

intégrable sur $]0,+\infty[$

car
* $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} = \underset{+\infty}{o}(e^{-u})$
* $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^{1/2}}$

Par convergence dominée à paramètre continu,

$$g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\pi}$$

Ccl $\quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\pi}$