Pour ve: 541.1, 541.2

Pour les 7h à rédiger 531.14, 531.15, 541.8, 541.9

Séries de fonctions numériques – interversion série/intégrale

$\sum f_n$ cv simple $\sum f_n$ cv normale $\sum f_n$ cv uniforme

$\sum \|f_n\|_\infty$ cv

transfert de cont / double limite / $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ ..

Séries entières $f(x) \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\frac{1}{1-x} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ $|x|<1$

1 Intégration

1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve chap 531 à la suite des sommes partielles.

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\, \mathrm{d}t = a_m$$

- Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ existe car $|a_p \sin(pt)| \leq |a_p|$ indép de t

  et $\sum a_p$ cv absolument

  donc $\sum a_p \sin(pt)$ cv normalement donc uniformément

  sur $\mathbb{R}$, et $t \mapsto a_p \sin(pt)$ sont continues donc

  f est continue sur $\mathbb{R}$.

- $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\, dt$ m fixé

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin pt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin pt \sin mt \, dt$$

On note $f_p(t) = a_p \sin pt \sin mt$

- $|f_p(t)| \leq |a_p|$ indép de t

  $\uparrow$ tg série absolument convergente

  donc $\sum f_p$ cv normalement, donc uniformément

  sur $[-\pi, \pi]$ segment.

- les f_p sont continues

Donc :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} f_p(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_p \sin(pt)\sin(mt)\,dt$$

$$\sin(pt)\sin(mt) = \frac{e^{ipt}-e^{-ipt}}{2i}\cdot\frac{e^{imt}-e^{-imt}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{i(p+m)t} + e^{-i(p+m)t}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{i(p-m)t} + e^{-i(p-m)t}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(p+m)t + \frac{1}{2}\cos(p-m)t$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_p\left(\cos(p-m)t - \cos(p+m)t\right)dt$$

où $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\,dt = \left[\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)\right]_{-\pi}^{\pi}$ si $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$= 0$$

Toutes les intégrales sont nulles, sauf pour $p=m$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_m\,dt = a_m$$

1.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- les f_n sont positives
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, si cette quantité est $< +\infty$, les f_n sont intégrables sur I, $\sum f_n$ converge simplement sur I, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I.*

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

• Pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{t}{e^t - 1} = t e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} \quad \text{où } |e^{-t}| < 1$$

$$= t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}$$

notée $f_n(t)$

Les f_n sont positives sur $]0, +\infty[$

On calcule, dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-nt}\,dt$$

car par parties, sous réserve de limite finie du crochet et de la convergence d'une intégrale

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{\searrow} e^{-nt}\,dt = \left[t(-1)\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1.(-1)\frac{e^{-nt}}{n}\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n^2}$$

Ainsi $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$< +\infty$$

donc l'intégrale et la somme convergent, sont égales.

1.3 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.
- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.

- pour $t \in]0,1[$

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \ln t \cdot \frac{1}{1-(-t^2)} \qquad \text{où } |-t^2| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \ln t \, (-t^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \, t^{2n} \ln t}_{f_n(t)}$$

- On applique le th d'interversion série/intégrale :

* $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$

* les f_n et la somme sont continues par morceaux sur $]0,1[$

* les f_n intégrables sur $]0,1[$ car :

au voisinage de 0, $|f_n(t)| = t^{2n} \ln t$

$= O(\ln t)$ intégrable en 0

en 1 les f_n sont continues.

* Montrons la cv de $\sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 |f_n(t)| dt \right)$

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 -t^{2n} \ln t \, dt$$

par parties, sous réserve de limite finies des crochets

$$= \left[-\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 t^{2n} dt$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}$$ tg d'une série convergente

(équivalent à $\frac{1}{4n^2}$ en $+\infty$)

Par intervertir série/intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{2n} \ln t \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$ par le calcul précédent

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n-1)^2}$$ par glissement d'indice.

1.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

- Pour $t \in]0,+\infty[$

$$\frac{1}{1+e^t} = e^{-t}\,\frac{1}{1+e^{-t}} \qquad \text{où } |e^{-t}|<1$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-t})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, e^{-nt}$$

On veut intervertir $\sum$ et $\int$

↳ pas sur un segment

↳ les f_n ne sont pas positives

↳ $\sum \int |f_n|$ cv ?

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nt}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n} \quad \text{tg série div}$$

↳ on applique 431 le Th de cv dominée.

idée 1

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,dt$$

↓ cv donnée [...]

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,dt$$

↓ linéarité

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

cv donnée appliquée à $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{CS} S$

idée 2

cv donnée appliquée à $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{CS} (t\mapsto 0)$

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \int_0^{+\infty} S_N(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt$$

par linéarité

puis on fait tendre $N \to +\infty$

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Pour $t \in]0,+\infty[$

$$\frac{1}{1+e^t} = e^{-t}\,\frac{1}{1+e^{-t}} \qquad \text{où } |e^{-t}|<1$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-t})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} e^{-nt}}_{f_n(t)}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} e^{-nt}}_{S_N(t)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt}}_{R_N(t)}$$

- $(R_N)_N$ converge simplement vers $(t \mapsto 0)$ sur $]0,+\infty[$

  (reste d'une série convergente)

- Domination !

  $\forall t \in]0,+\infty[,\ \forall N \geq 1$

  $$|R_N(t)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt} \right|$$

  ↑ série alternée
  ↑ somme géométrique

$$= \left| (-1)^{N+2} e^{-(N+1)t} \cdot \frac{1}{1+e^{-t}} \right|$$

$$\leq \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \quad \text{indép de } N$$

$$= \frac{1}{e^t+1} \quad \text{intégrable sur }]0,+\infty[$$

(car continue en 0, $\underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$)

Par convergence dominée $\int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$

- $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_0^{+\infty} R_N(t)\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \qquad \xrightarrow{N\to+\infty} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt + 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Donc, par $N\to+\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt.$

Remarque

Donnons !

$$|R_N(t)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt} \right|$$

$(e^{-nt})_n$ est positive, décroissante, de limite nulle,

donc par la règle des séries alternées

$$|R_N(t)| \leq |(-1)^{N+2} e^{-(N+1)t}|$$

$$\leq e^{-t} \quad \text{indép de } N$$

↑ intégrable sur $]0, +\infty[$

Exemple.

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$