Pour yé 531.1, 531.9, 531.16

$(f_n)_n$ cv simplement, cv uniformément $\mathcal{C}^0$ $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{C}^k$

$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt \overset{?}{=} \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$

Intégration des suites de fonctions numériques – convergence dominée

1 Intégration

1.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

Lemme. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a \in I$.
Si :

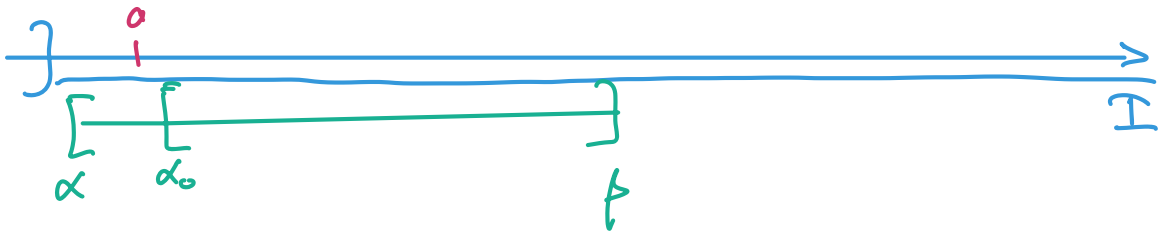
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $K \subset I$,
- les f_n sont continues.

alors, en notant $G_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

- $(G_n)_n$ converge uniformément vers G sur tout segment de I.

Remarque. *Ainsi, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation, à condition de prendre les primitives qui s'annulent toutes en un même point a donné.*

Preuve :



- Soit $[\alpha, \beta) \subset I$. Quitte à agrandir $[\alpha, \beta]$, on peut supposer $a \in [\alpha, \beta)$
- Pour $x \in [\alpha, \beta)$

$$|G_n(x) - G(x)| = \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^x f_n(t) - f(t)\, dt \right|$$

$$\leq \begin{cases} \displaystyle\int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt & \text{si } a < x \\ \displaystyle\int_x^a |f_n(t) - f(t)|\, dt & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

$$\leq |x - a| \, \|f_n - f\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$$

$$\leq (\beta - \alpha) \, \|f_n - f\|_\infty^{[\alpha,\beta]}$$

indép de x

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,
- $[a,b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve : $\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right|$

$= \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt\right|$

$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$ $\quad a<b$

$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty^{[a,b]}\,dt$ $\quad \|.\|_\infty$ existe par hyp.

$= (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty^{[a,b]}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque.

- *La 3e hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.*
- *La **fonction dominante** φ est bien-sûr positive (elle majore $|f_n|$) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.*
- *Lorsque I est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.*
- *Il est fréquent que, à t fixé, $(f_n(t))_n$ soit positive et monotone.*
  - *Lorsqu'elle décroît, f_1 peut être choisie comme fonction dominante ;*
  - *Lorsqu'elle croît, la limite f peut être choisie comme fonction dominante.*

650.7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) ~~Montrer l'existence de I_n, pour tout n.~~

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

On note $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n(1+x^2)}$

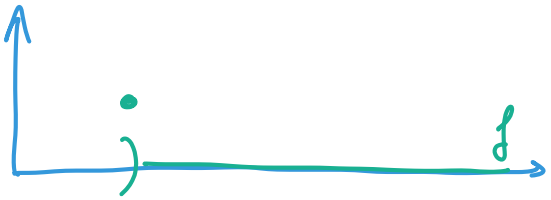
• Étude de la cv simple sur $[1,+\infty[$

Soit $x \in [1,+\infty[$

* si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

* si $x > 1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



• Dominons !

Dominer, c'est majorer la valeur absolue de $f_n(x)$ par une fonction indépendante de n et intégrable sur $[1,+\infty[$ (↑ où x varie)

Pour $x \in [1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^n(1+x^2)}$$

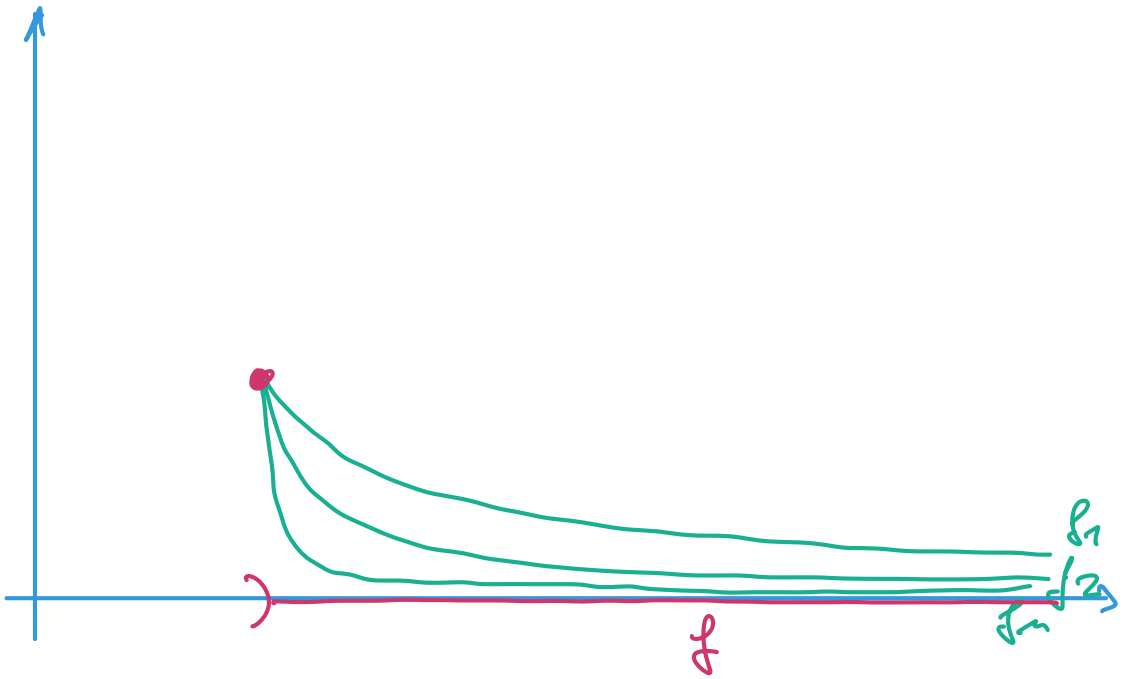
$\leq \dfrac{1}{1\ (1+x^2)}$ indép. de n

intégrable sur $[1,+\infty[$

- les f_n et f sont continues par morceaux sur $[1,+\infty[$

Par convergence dominée, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$\| \quad 0$



$$\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_{[1,+\infty[} f_n(t)\,dt = \int_{]1,+\infty[} f_n(t)\,dt$$

On peut simplifier l'étude de la limite simple.

- $\forall x \in]1,+\infty[, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x^n(1+x^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(f_n)_n$ CV simplement sur $]1,+\infty[$ vers $x \mapsto 0$

Exemple. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, \mathrm{d}x$.

Quel th utiliser ? cv unif sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ ou cv dominée ?

Soit $f_n(x) = \tan^n x$

Étude de la cv simple sur $[0, \frac{\pi}{4}[$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$ fixé

$f_n(x) = \tan^n x$

$= (\tan x)^n$ où $(\tan x) \in [0, 1[$ si $x < \frac{\pi}{4}$

~~$= 1$ si $x = \frac{\pi}{4}$~~

$\xrightarrow[n \to +\infty]{}$ $\begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ \sout{1 \quad \text{si } x = \frac{\pi}{4}} \end{cases}$

La limite simple de f_n n'est pas continue, donc la cv n'est pas unif $\longrightarrow$ on applique la cv dominée.

$(f_n)_n$ cv simplement sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ vers $x \mapsto 0$

- Dominons

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$|f_n(x)| = (\tan x)^n$

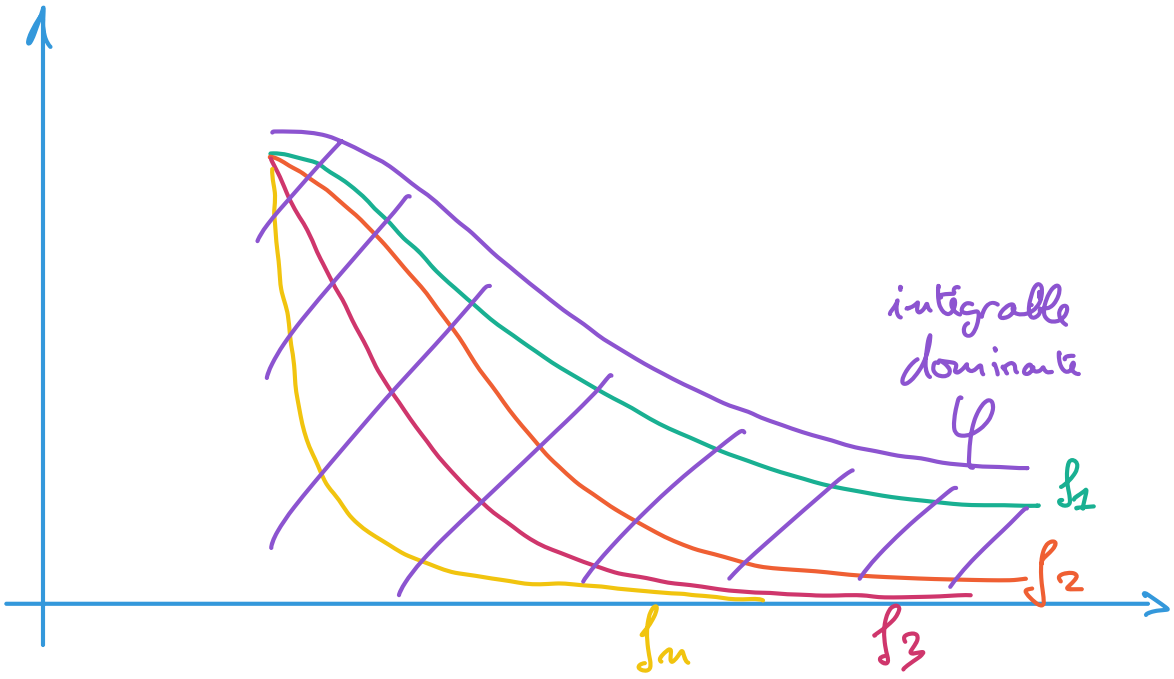
≤ 1 indépendante de n

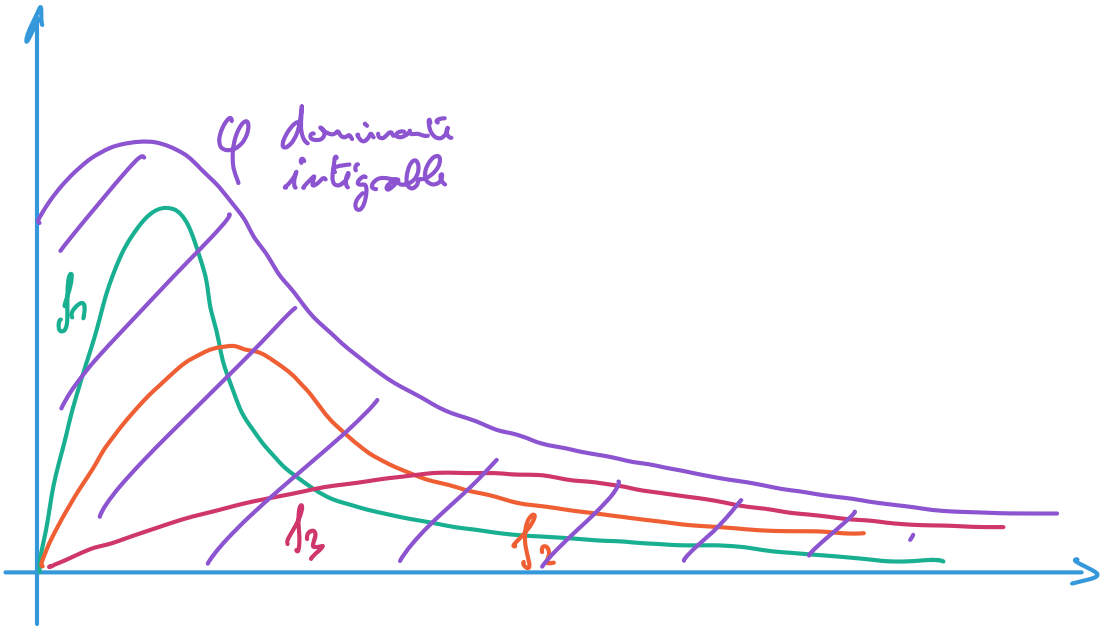
intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$

dépend de x à priori.

Par cv dominée, $\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/4} 0 \, dx = 0$

Remarque C'est quoi l'hyp de domination ?





Exemple. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque. *On peut connaître la valeur* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

On note $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ pour $x \in \mathbb{R}$

- Étude de la cv simple. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Au voisinage de $n \to +\infty$

$$f_n(x) = e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$$

$$= e^{-n\left(\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{-x^2+o(1)}$$

au voisinage de $n\to+\infty$ ce $o(1)$ dépend de x

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2}$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \mapsto e^{-x^2}$

- Domination

$$|f_n(x)| = e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$$

2 pistes : * minorer $\ln(1+u)$

* étude de $t \mapsto t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)$

On note $g(t) = t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)$

$$g'(t) = \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) + t\cdot(-)\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) - \frac{x^2}{t+x^2}$$

$t \geq 1$ $\qquad g''(t) = (-)\ \frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$

$$= -\frac{x^2}{t(t+x^2)} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2(t+x^2) + x^2 t}{t(t+x^2)^2}$$

$$= -\frac{x^4}{t(t+x^2)^2}$$

t	1	$+\infty$
g''	$-$	
g'	$+$	0
g	↗	

Donc à x fixé, $\left(e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}\right)_n$ est ↘

Un regard la domination :

$$|f_n(x)| \leq f_1(x)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$ indép de n

↑ intégrable sur $]-\infty, +\infty[$

(1) • $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue (par morceaux) sur $]-\infty, +\infty[$

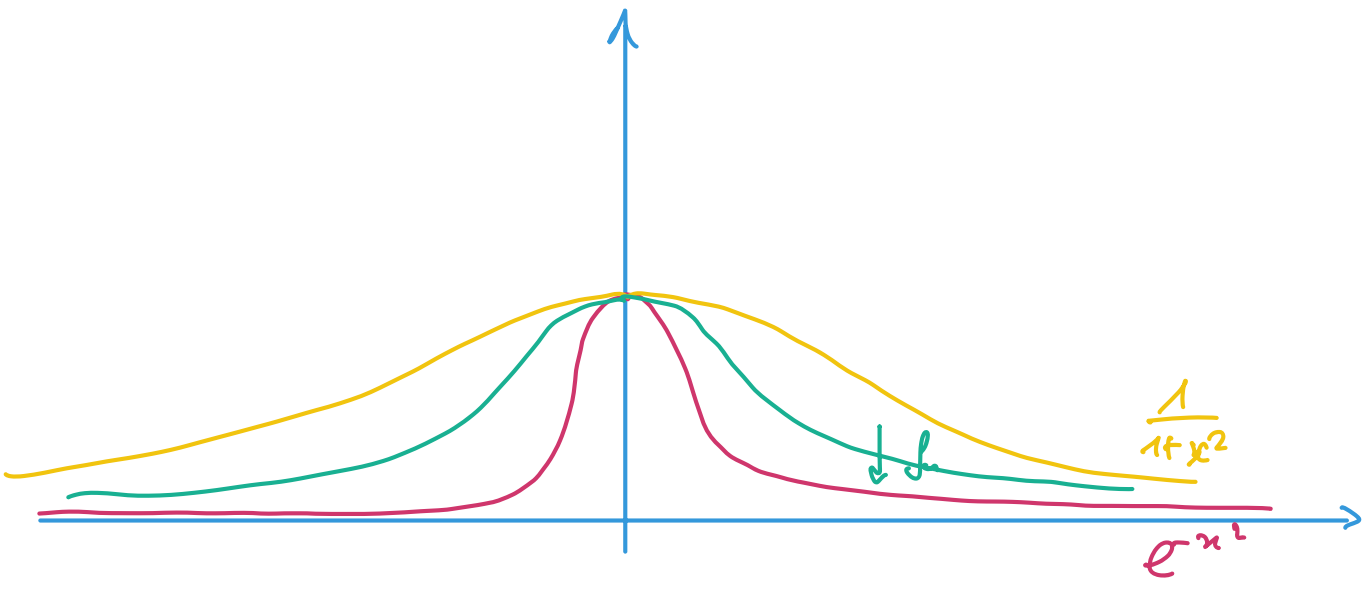
• Au voisin de $+\infty$, $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$

• Au voisin de $-\infty$ $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$

(2) Un fond $[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

Par convergence dominée

$$\int_{-n}^{+n} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$



Exemple. Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

531.2

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

en posant $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

Étude de la cv simple

Soit $x \in [0,+\infty[$ fixé.

Au voisinage de $n \to +\infty$

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } \cancel{x \le n}\ n \ge x \\ 0 & \text{si } \cancel{x > n}\ n < x \end{cases}$$

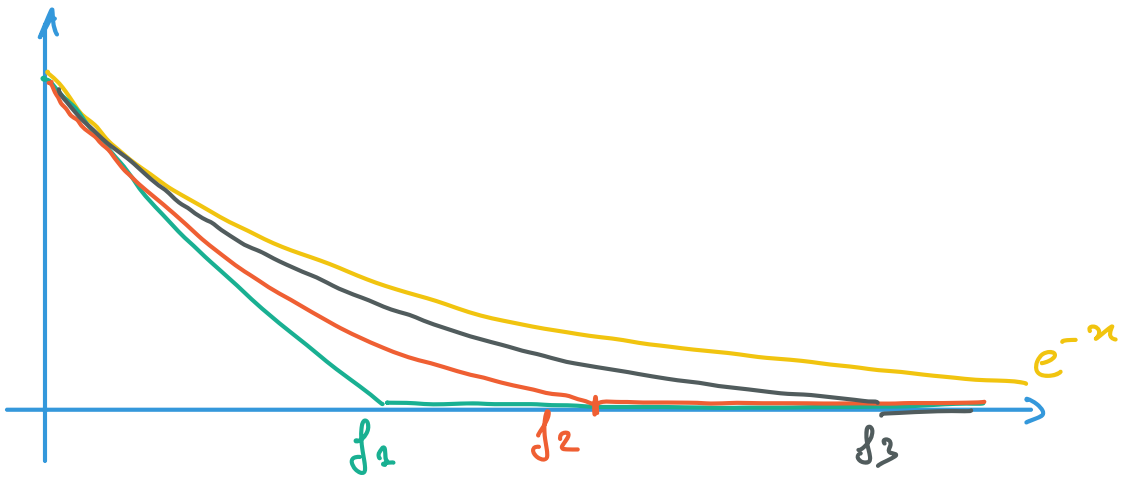
$$= \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{pour } n \ge x$$

$$= e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$$

$$= e^{-x+o(1)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \left(x \mapsto e^{-x}\right)$



Domaine

Pour $x \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$

1er cas si $x \leq n$

$$|f_n(x)| = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$
$$\leq e^{n\left(-\frac{x}{n}\right)}$$
$$= e^{-x}$$

$\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$

~~indépendant de n~~

2e cas si $x > n$

$$|f_n(x)| = 0$$
$$\leq e^{-x}$$

Bref : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f_n(x)| \leq e^{-x}$ indép. de n

intégrable sur $[0, +\infty[$

Donc par convergence dominée,

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

531.2

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

On pose $t = \frac{x}{n}$

$dt = \frac{1}{n}\,dx$

t de 0 à 1 $\quad$ x de 0 à n

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \, n\,dt$$

$$= n\left[\frac{-1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

531.3

Déterminer un équivalent de :

$$I_n = \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

On pose $t = \frac{x}{n}$

$dt = \frac{1}{n}dx$

t de 0 à 1 $\quad$ x de 0 à n

$$I_n = n\underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+(1-t)^n}\,dt}_{\text{notée } I_n}$$

On note $f_n(t) = \sqrt{1+(1-t)^n}$

- Convergence simple

Soit $t \in]0,1]$ fixé

$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $(f_n)_n$ cv simplement vers $t \mapsto 1$ sur $]0,1]$

- Dominons

$|f_n(t)| = \sqrt{1+(1-t)^n}$

$\leq \sqrt{2}$ indépendant de n

intégrable sur $]0,1]$

Donc, par cv dominée $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 1 \, dt = 1$

Donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.