Pour lundi 7^{h}, à rédiger 650.29
650.30
→ entraînement à la rédaction.

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{d}t$.

- $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

- Étude au voisinage de $t \leq \frac{\pi}{4}$ $\qquad t = \frac{\pi}{4} - u$ où $u \geq 0$

Pour $u \geq 0$

$$f\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos u + \sin u - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{-\frac{u^2}{2} + u + o(u^2)}$$

$$\underset{u \to 0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{u}$$ non intégrable en 0

donc f n'est pas intégrable en $\frac{\pi}{4}$.

or $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Méthode. On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

Exemple. Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$?

• Pour $x \geqslant 4$, $\sqrt{x} + \sin x \geqslant 2 - 1 = 1 > 0$

donc $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ est continue sur $[4, +\infty[$

• Au voisinage de $x \to +\infty$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \quad \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 0\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{g_1(x)} - \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{g_2(x)} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}_{g_3(x)}$$

* $\displaystyle\int_4^{+\infty} g_1(x)\,\mathrm{d}x$ converge [...] cf 650.3 par parties

* $g_3(x)$ intégrable en $+\infty$ par comparaison

* $\displaystyle g_2(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$

où $\int^{+\infty} \frac{1}{2u}\,du$ diverge

et $\int^{+\infty} \frac{\cos 2u}{2u}\,du$ converge par parties (650.3)

Bref : l'intégrale étudiée diverge.

3.4 Cas des fonctions positives, continues et intégrables

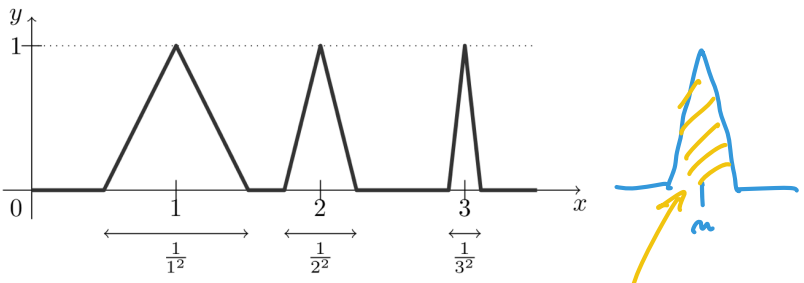
Théorème.

Si f est positive, continue et intégrable, et $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

Remarque.

- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*

1. Cette fonction est-elle intégrable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?



$\frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} \times 1$

$$\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} < +\infty$$

car f positive, donc $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ converge

pas de divergence gommée d'une intégrale !

Exercice

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire

existe forme bilinéaire symétrique positive, définie-positive

- Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$f : t \longmapsto \dfrac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ continue sur $]-1, 1[$

- Au voisinage de $t \xrightarrow{<} 1$ $\quad t = 1-u$ où $u \xrightarrow{>} 0$

$$f(1-u) = \frac{P(1-u)\,Q(1-u)}{\sqrt{1-(1-u)^2}}$$

$$= \frac{P(1-u)\,Q(1-u)}{\sqrt{2u-u^2}}$$

$$= \frac{P(1-u)\,Q(1-u)}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{2-u}}$$

$$\underset{u \to 0^+}{\sim} \frac{P(1-u)\,Q(1-u)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{u}}$$ ← continue en 0 donc bornée

$$= \underset{u \to 0^+}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$ donc intégrable en 0.

Dernière avec $f(-1+u)$ pour $u \xrightarrow{>} 0$

Ainsi $\langle P, Q \rangle$ existe

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme "à valeurs réelles"

  bilinéaire par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit

  symétrique par commutativité du produit

- $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

  $\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\langle P, P \rangle = 0$

  ie $\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$

intégrale nulle d'une fct continue positive

donc $\forall t \in]-1, 1[\quad \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$

donc P a une infinité de racines

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

CL : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.