Pour ne 650.1, 650.4, 650.21

**Exemple.** Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \checkmark \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \checkmark \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \checkmark$$

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \checkmark \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

$\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ ?

$\int_0^{+\infty}$ $\int_{[0,+\infty[}$ $\int_{]0,+\infty[}$ ---

• $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$

(M1) • Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2} \geqslant 0$$ et d'intégrale cv en $+\infty$

(Riemann $2>1$)

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge

(M2) $\frac{1}{1+t^2}$ de primitive $\arctan t$ (+cste)

Sous réserve de limite finie des crochets,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^{t\to+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

L'intégrale converge, et sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

- $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue (par ruse) sur $[0, +\infty[$

FT1. Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \text{ diverge}$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$ diverge.

FT2. $t \mapsto \frac{1}{1+t} \geqslant 0$ $\forall t$

On calcule, dans $[0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^{+\infty}$$

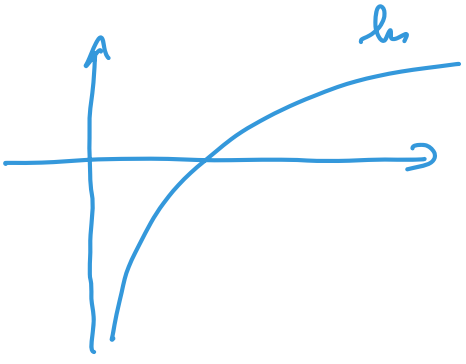
$$= +\infty$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$ est divergente.

$\int^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\,dt$ divergente $\ln(\ln t)$

$\int^{+\infty} \cos t\,dt$ divergente

$\int_0^{\to 1} \ln(t)\,dt$



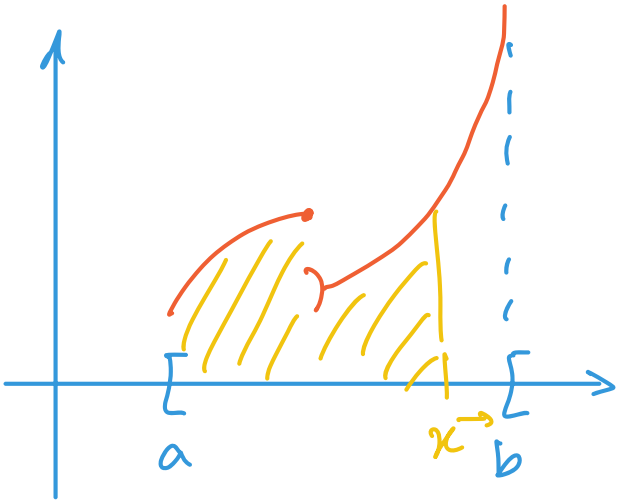
# 2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

**Remarque.** *Sans autre précision, dans cette section, $a$ et $b$ sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $I$ désigne un intervalle dont les extrémités sont $a$ et $b$.*
*Lorsque $a$ et $b$ sont finis et $I = [a, b]$, il s'agit d'un segment.*
*Lorsque $a$ est fini, $b = +\infty$ et $I = [a, +\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.*

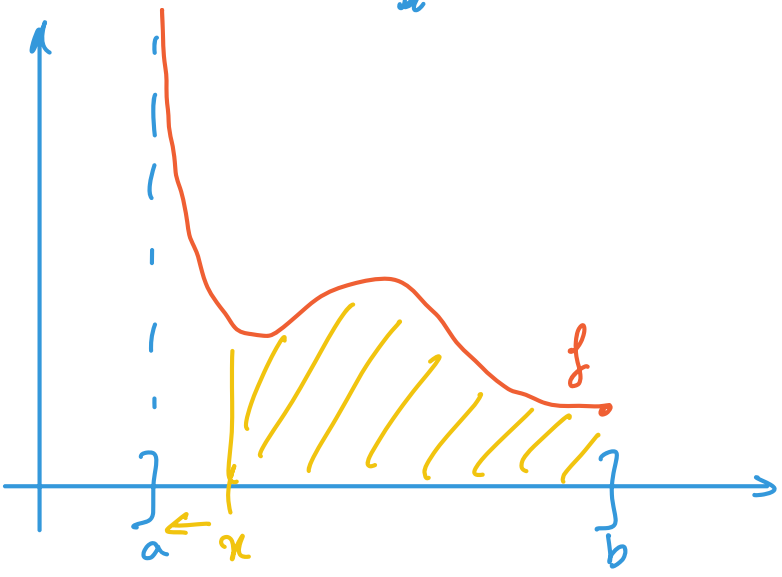
## 2.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

**Définition.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.

- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x<b}{\longrightarrow} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I = ]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x>a}{\longrightarrow} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.




$\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ ou ssi l'intégrale partielle $\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie si $x \to b$

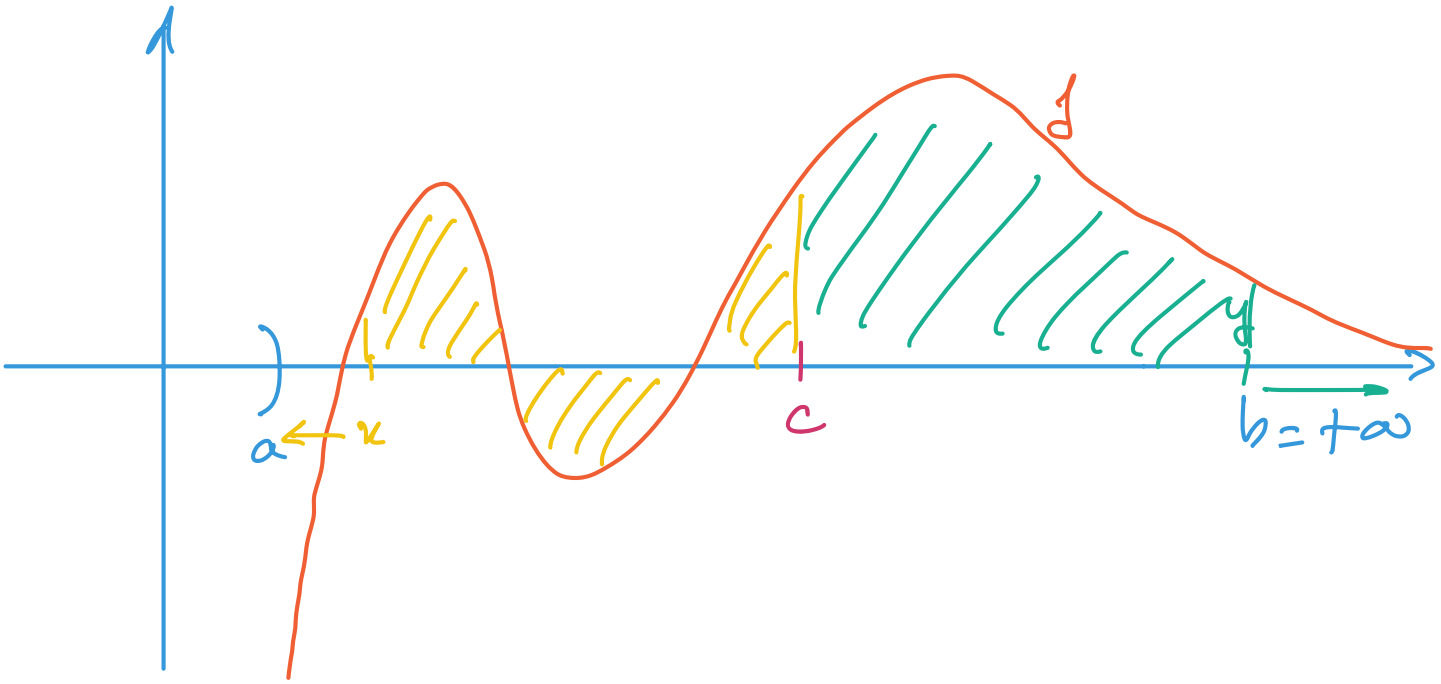


$\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt$ cv ssi l'intégrale partielle

$\int_{x}^{b} f(t)\,dt$ a une limite finie pour $x \to a$

- Lorsque $I = ]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.
  Prenant $c$ tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans ce cas, on note $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

**Remarque.** *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de c. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.*




$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,dt$ cv si $\int_{c}^{\to b} f(t)\,dt$ cv

et

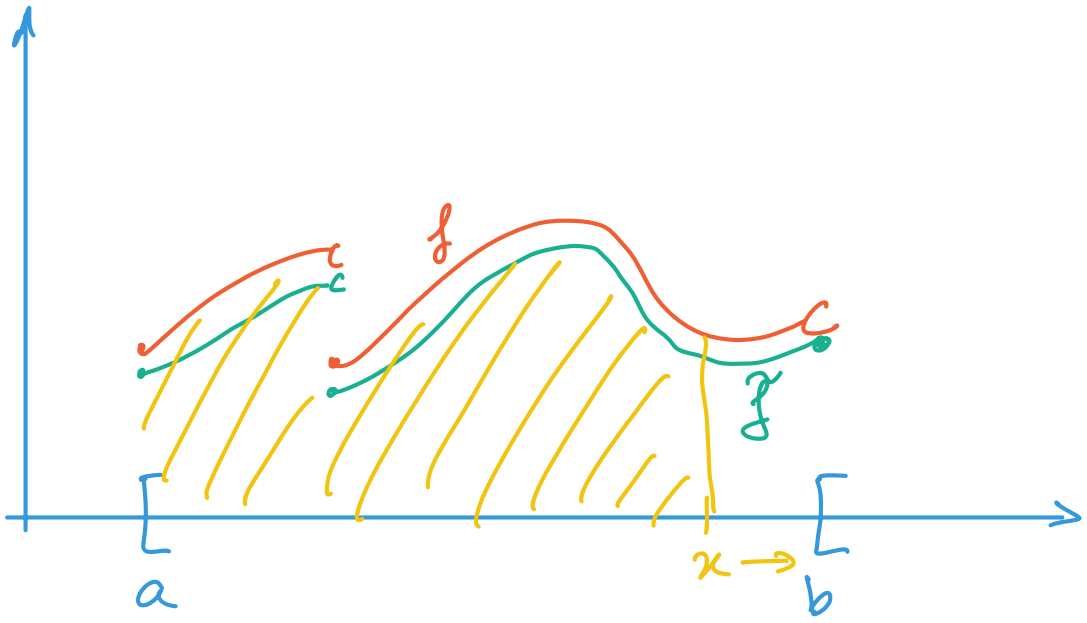
$\int_{\to a}^{c} f(t)\,dt$ cv.

Remarque Attention !! 2 études de convergence, les 2 intégrales partielles ont des bornes indépendantes

**Proposition.** Lorsque $a$ (resp. $b$) est fini, et que $f$ se prolonge par continuité en $a$ (resp. $b$), alors l'intégrale généralisée en $a$ (resp. $b$) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

**Remarque.** *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en $\pm\infty$.*

**Exemple.** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.




On suppose $f$ cp. par sur $[a,b[$ $\quad b<+\infty$

$f$ a une limite finie en $b$ à gauche

On note $\tilde{f}$ la fct cpm sur $[a,b]$ prolongée de $f$ par la limite ($\tilde{f}$ continue en $b$)

Par les intégrales partielles

limite supposée

Au voisinage de $x \leq b$

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^x \underbrace{\left(f(t)-\tilde{f}(t)\right)}_{=0}\,dt - \int_x^b \tilde{f}(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_x^b |\tilde{f}(t)|\,dt$$

$\leq \|\tilde{f}\|_\infty^{[a,b]} (b-x)$

($\|\tilde{f}\|_\infty^{[a,b]}$ existe car $\tilde{f}$ cpm sur $[a,b]$ segment)

$\xrightarrow[\substack{x \to b \\ x < b}]{} 0$

Bref Si intégrale généralisée en $b$ et $f$ se prolonge par continuité en $b$, l'intégrale est CV "comme en 1re année".

**Exemple.** Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

- $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ continue (par mcx) sur $]0,1]$

- Au voisinage de $t=0$

$$\frac{\sin t}{t} \sim \frac{t}{t}$$

$$= 1$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

donc $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0

donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est faussement généralisée,

Convergente.

## 2.2 Cas des fonctions positives

**Remarque.** *Lorsque $f$ est positive, on autorise l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
*Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.*

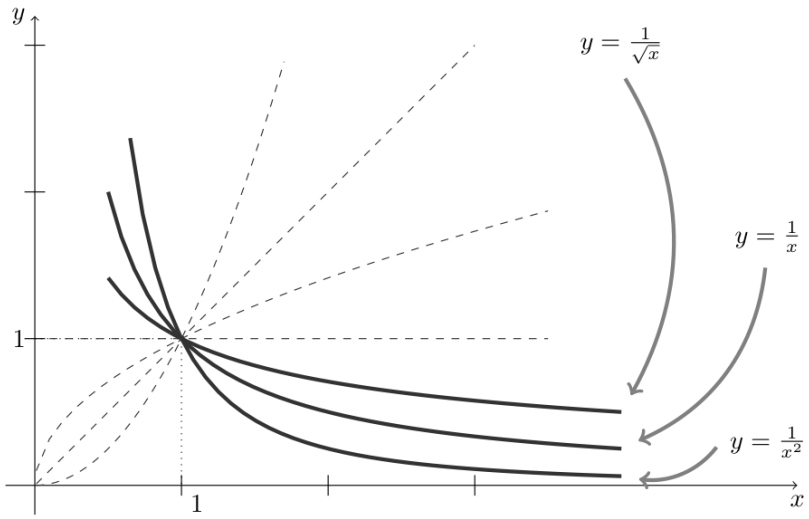
« $f$ est positive.
On calcule dans $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ »

## 2.3 Exemples de référence

**Intégrales de Riemann en $+\infty$.**

a>0

L'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.




**Exponentielle en $+\infty$.**

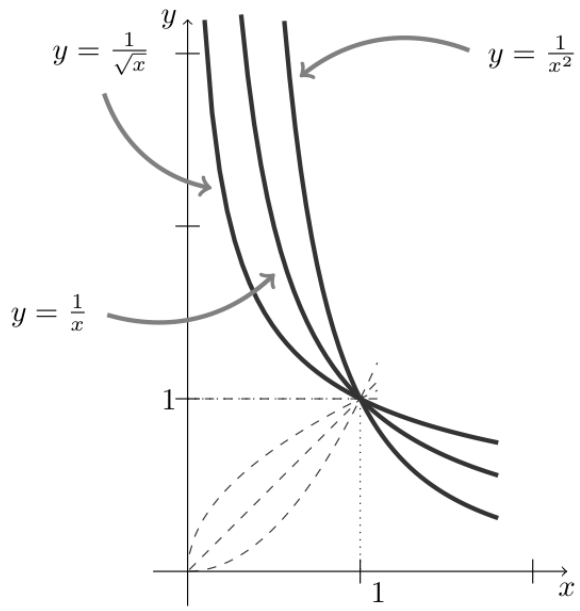
L'intégrale généralisée $\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

**Intégrales de Riemann en $0$.**

b

L'intégrale généralisée $\int_{\to 0}^{b} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

b>0




Par les int particulières

. Si $\alpha = 1$ $\quad \int_n^1 \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_n^1$

$= -\ln n$

$\longrightarrow +\infty$ quand $x \to 0$

donc $\int_{\to 0} \frac{1}{t}\,dt$ diverge

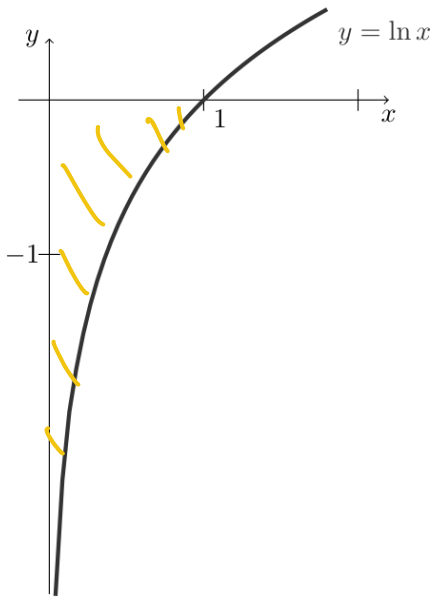
- Si $\alpha \neq 1$ $\quad \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_x^1 t^{-\alpha}\,dt$

$$= \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_x^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right)$$

$\longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } 1-\alpha > 0 \text{ ie } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha < 0 \text{ ie } \alpha > 1 \end{cases}$

**Logarithme en 0.** L'intégrale généralisée $\int_{\to 0}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.



Sous réserve de limite finie des crochets

$$\int_0^1 \ln t \, dt = \Big[ t \ln t - t \Big]_{t \to 0}^{1}$$

$$= -1 - 0$$

en particulier, l'intégrale est convergente.

## 2.4 Propriétés

**Linéarité.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $I$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. Si les intégrales généralisées $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Corollaire.** Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_I f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

**Remarque.** *Que penser de l'écriture :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t\ ?$$

Preuve : cas où $I = [a, b[$

par les intégrales partielles

$$\int_a^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,dt = \lambda \int_a^x f(t)dt + \mu \int_a^x g(t)dt$$

(linéarité de l'intégrale des fct cpm sur le segment $[a, x]$ )

On fait tendre $x \to b^-$

D'où limite finie et la valeur de la limite

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt$$

CV

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+1}\,dt$$

par linéarité

div div.

**Positivité.** Soit $f$ une fonction cpm sur $I$ d'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

**Croissance.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions cpm sur $I$, d'intégrales généralisées sur $I$ convergentes.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Remarque.** *Pour les intégrales généralisées convergentes, lorsque $a > b$, on définit par convention :*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

**Relation de Chasles.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, d'intégrale généralisée sur $I$ convergente.

Pour tous $a, b, c$ éléments ou extrémités de $I$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales impliquées.

**Proposition.** Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $x < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on l'appelle **reste** de l'intégrale convergente, et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{x \to b \\ <}}{\longrightarrow} 0$$

## 2.5 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

### 2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

**Théorème.**

Soit $f$ continue par morceaux sur $]a,b[$, dont on connaît une primitive $F$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $F$ admet une limite finie $\ell_a$ en $a$ à droite et une limite finie $\ell_b$ en $b$ à gauche.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t\overset{>}{\to}a}^{t\overset{<}{\to}b} = \ell_b - \ell_a$$

**Remarque.** *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

### 2.5.3 Intégration par parties

Terminons par une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de $n$.

**Théorème.**

Si :

- $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$
- $f(t)g(t)$ admet des limites finies en $a$ à droite et en $b$ à gauche

Alors :

- les intégrales de $fg'$ et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t\overset{>}{\to}a}^{t\overset{<}{\to}b} - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Remarque.** *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, on ne vérifie pas les hypothèses de régularité. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^b \overset{\nearrow}{u}(t)\underset{\searrow}{v}(t)\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

*en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. $U$ désigne une primitive de $u$.*
*La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.*

### 2.5.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour pour l'étude de $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un autre intervalle semi-ouvert, d'un intervalle ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Si $\varphi : [\alpha,\beta[ \to [a,+\infty[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^{\to\beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

**Remarque.** *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

**Remarque.** *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

$$\begin{array}{rcl} t & \text{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \text{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \text{devient} & u \text{ de } \alpha \text{ à } \beta \end{array}$$

**Remarque.** *On peut adapter ce résultat au cas où $\varphi$ est strictement décroissante.*

$$\begin{array}{rcl} t & \text{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \text{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \text{devient} & u \text{ de } \beta \text{ à } \alpha \end{array}$$

**Remarque.** *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on ne précise pas les hypothèses de régularité.*

**Exemple.** Convergence et calcul de ($\alpha > 0$) :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ 3. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ 4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

4. $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ continue sur $[0,1]$

(intégrale pas généralisée)

On pose $t = \sin u$ ($\mathcal{C}^1$, st $\uparrow$, bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$)

$dt = \cos u\, du$

$t$ de 0 à 1 $\quad u$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}\cdot \cos u\, du$$

$$= \int_0^{\pi/2} |\cos u| \cos u\, du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du$$

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$ $\quad = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1+\cos 2u\, du$

$= 2\cos^2 u - 1$ $\quad = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx$$

$d(x^5) = 5x^4\,dx$

On pose $x^5 = t$

$5x^4\,dx = dt$

$x$ de 0 à $+\infty$ $\quad t$ de 0 à $+\infty$

Par changement de variable, sous réserve de cv de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{5(t^2+1)}$$

↑ converge

$$= \frac{\pi}{10}$$

M2 Sous réserve de limite finies des crochets

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx = \left[\frac{1}{5}\operatorname{Arctan}(x^5)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{10}$$

# 3 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

**Remarque.** *Sauf mention contraire, $I$ désigne un intervalle, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.*

## 3.1 Convergence absolue d'une intégrale généralisée

**Définition.** On dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

**Remarque.** *L'intérêt de cette notion est de remplacer, lors de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrande par une fonction positive, ce qui donne accès aux théorèmes de convergence par comparaison, par équivalent, par comparaison asymptotique, et qui sont étudiés dans cette section.*

**Théorème.**

Soit $f$ continue par morceaux sur $I$.
Si :

- $\int_I f$ converge absolument *i.e.* $\int_I |f|$ converge.

Alors :

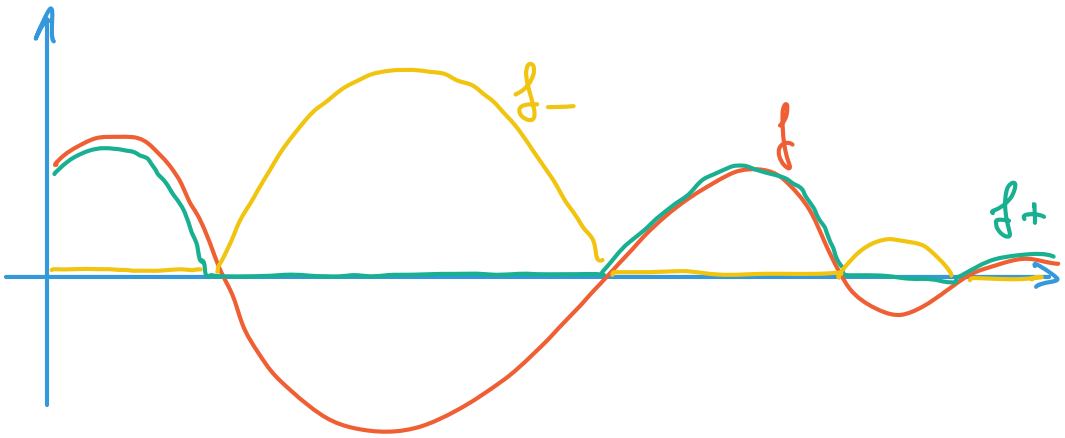
- $\int_I f$ converge
- $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

**Remarque.**

- *Il s'agit bien d'une condition suffisante, mais non nécessaire.*
  *La convergence, et la non convergence absolue de* $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *fournit un contre-exemple classique qu'il convient d'avoir à l'esprit.*
- *Pour une fonction positive, convergence et convergence absolue de l'intégrale sont des notions équivalentes.*

Théorie. Cas où $I = [a, +\infty[$

• Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$




Pour $t \in [a, +\infty[$, on note

$$f_+(t) = \mathrm{Max}(f(t), 0) \geqslant 0$$

$$f_-(t) = \max(-f(t), 0) \geq 0$$

On a : $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$

$$|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$$

$\forall t \in I$

$$0 \leq f_+(t) \leq |f(t)|$$

↑ d'intégrale cv sur $I$

donc $\int_I f_+(t)\,dt$ converge.

De même $0 \leq f_-(t) \leq |f(t)|$

donc $\int_I f_-(t)\,dt$ converge

Par linéarité $\int_I f(t)\,dt$ converge.

De plus $\forall t \quad f(t) \leq |f(t)|$

et $-f(t) \leq |f(t)|$

Donc, par croissance de cv de $\int_I |f(t)|\,dt$

$$\int_I f(t)\,dt \leq \int_I |f(t)|\,dt$$

et $\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt$

donc $\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt$

Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

On suppose $\int_I |f(t)|\,dt$ converge.

Or $0 \leq |\mathrm{Re}(f(t))| \leq |f(t)|$

donc $\int_I \mathrm{Re}\, f(t)\,dt$ converge absolument.

donc converge (cas I)

de même $\int_I \mathrm{Im}\, f(t)\,dt$ converge absolument

donc converge

Donc $\int_I f(t)\,dt$ converge.

## 3.2 Intégrabilité d'une fonction

**Définition.** On dit que $f$ est **intégrable sur** $I$ lorsque $f$ est continue par morceaux sur $I$ et l'intégrale de $f$ sur $I$ est absolument convergente.

**Remarque.** *Lorsque l'on dit intégrable sur $I$, on parle donc d'une fonction, de l'intégrande d'une intégrale absolument convergente.*
*Lorsque l'on dit absolument convergente, on parle d'une intégrale généralisée, dont l'intégrande est intégrable.*
*Pas de confusion : intégrable ne signifie pas que l'on peut simplement considérer l'intégrale de la fonction.*
*Pas de confusion : intégrable ne signifie pas primitivable.*

**Notation.** On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I$.

**Proposition.**

- Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue est intégrable.
- Sur un intervalle $]a, b[$ borné, une fonction continue qui se prolonge par continuité en $a$ et $b$ est intégrable.

**Remarque.** *Si $I = [a, b[$, on dit que l'on étudie l'intégrabilité de $f$ en $b$. L'intégrabilité de $f$ continue (par morceaux) sur $I = [a, b[$ ne dépend en effet que du comportement local de $f$ au voisinage de $b$.*

$f$ intégrable sur $[a, b[$

$\Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_c^b |f(t)|\,dt$ converge

quelque soit $c \in [a, b[$

dépend du comportement de $f$ au voisinage de $b$ (à gauche)

On dit "$f$ est intégrable en $b$ (à gauche)"

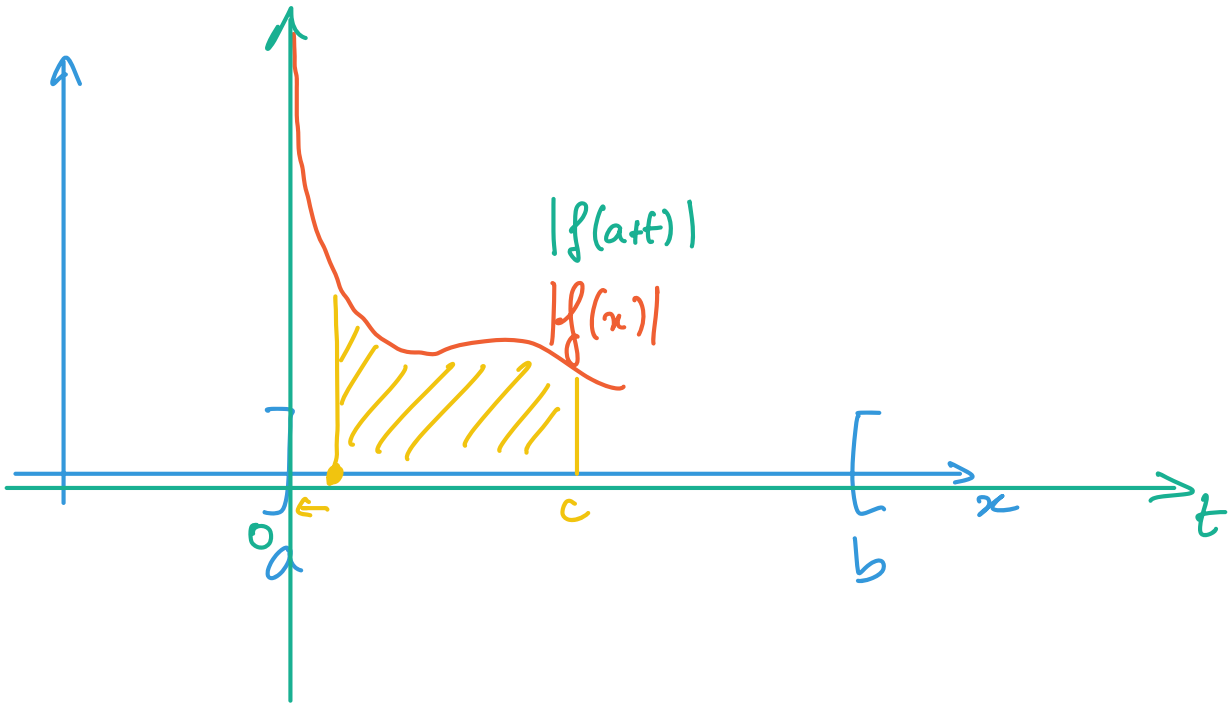
au voisinage de $b$

**Exemples de référence.**

- ln est intégrable en 0 ;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ ;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ ;
- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en $a$ si et seulement si $\alpha < 1$.

à droite à gauche

**Proposition.** La fonction $f$ est intégrable en $a$ (resp. en $b$) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0 à droite




cv d'une intégrale ?

⇕ cv absolue

⇕ intégrabilité au voisinage de

bornes de l'intervalle d'intégrati

## 3.3 Techniques d'étude

**Remarque.** *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne (on fait deux études distinctes si l'intégrale est doublement généralisée). L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce voisinage.*
*L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même. C'est pour cette raison que les résultats sont énoncés en termes de fonctions intégrables.*

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

**Théorème.**

Si $|f| \leqslant |g|$ et $g$ intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors $f$ est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(g(x))$ et $g$ intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors $f$ est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

**Remarque.** *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque* $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x))$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors $f$ est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

**Proposition.** Précisons aussi que, dans le cas où $f$ et $g$ sont telles que $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ et $f$ non intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $g$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Preuve : • Si $\forall t \in [a, +\infty[$, $0 \leq |f(t)| \leq |g(t)|$
↑ d'intégrale cv sur $[a, +\infty[$

donc $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

• Si $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O(g(t))$

$\exists A > 0, \exists c$ tq $\forall t \in [c, +\infty[$ $|f(t)| \leq A|g(t)|$

or $g$ intégrable sur $[c, +\infty[$,

donc on conclut par le 1er point.

• Si $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$

$\exists c$ tq $\forall t \in [c, +\infty[$

$\frac{1}{2}|g(t)| \leq |f(t)| \leq \frac{3}{2}|g(t)|$

On conclut avec le 1er point.

**Exemple.** Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$$

- $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ continue (par ruse) sur $]-\infty, +\infty[$

- Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\cos t}{1+t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\uparrow$ intégrable en $+\infty$

donc $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ intégrable en $+\infty$.

Énonçons maintenant le théorème dans le cas où $I = ]0, b]$. On considère $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]0, b]$.

**Théorème.**

en 0 à droite  en 0 à droite

Si $|f| \leqslant |g|$ et $g$ intégrable ~~sur $]0, b]$~~, alors $f$ est intégrable ~~sur $]0, b]$~~.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g$ intégrable sur $]0, b]$, alors $f$ est intégrable sur $]0, b]$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable sur $]0, b]$, alors $f$ est intégrable sur $]0, b]$.

à droite

**Exemple.** Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{\ln t}{1+t} \qquad t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \qquad t \mapsto \frac{1}{\sin t}$$

V1 : convergence de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt$ ?

V2 : intégrabilité de $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ ?

- $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ continue sur $]0, 1]$
- Au voisinage de $t \geq 0$

$$\frac{\ln t}{1+t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\ln t}{1}$$

$= \ln t$

↑ intégrable en 0

Donc $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ intégrable en 0 à droite.

$t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}$ continue sur $]0,1]$

Au voisinage de $t \overset{>}{\to} 0$

$$\frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \sim \frac{t}{t\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}$$ intégrable en 0

(Riemann, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

**Remarque.** *Les théorèmes précédents s'adaptent à tous les cas d'intervalles semi-ouverts. On préfèrera cependant commencer par effectuer un changement de variable pour ramener le problème en 0 ou en $+\infty$, là où on sait comparer les fonctions entre elles.*

**Exemple.** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{d}t$.

**Méthode.** On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

**Exemple.** Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ ?

## 3.4 Cas des fonctions positives, continues et intégrables

**Théorème.**

Si $f$ est positive, continue et intégrable, et $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est la fonction nulle sur $I$.

**Remarque.**

- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*