Par jé 650.2, 650.6, 650.7

Intégration sur un intervalle quelconque

$\int_0^1 f(t)\,dt$ $\quad$ f continue sur $[0,1]$ par morceaux

f continue par morceaux sur $[a,b]$ segment

signifie : $\exists \sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a,b]$

$a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$

tq $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge à $[a_i, a_{i+1}]$ de façon continue

ie $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ continue et admet une limite finie en a_i à droite en a_{i+1} à gauche

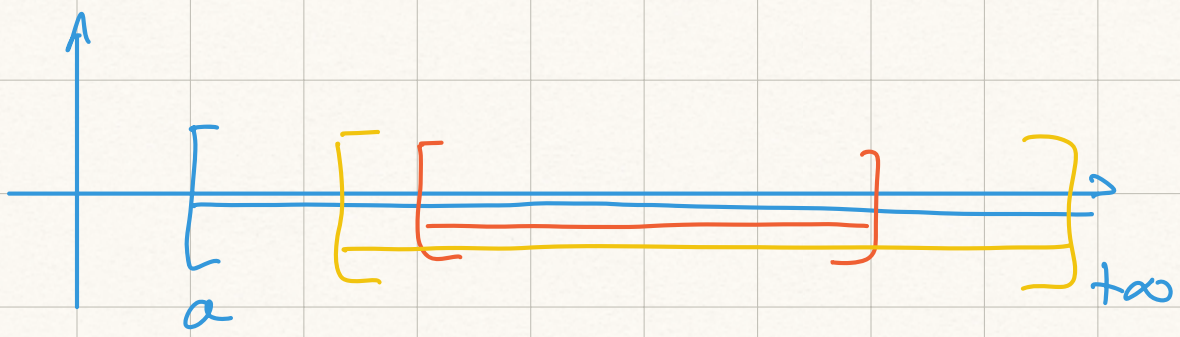
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$?

1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans cette section, a désigne un réel fixé.

1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

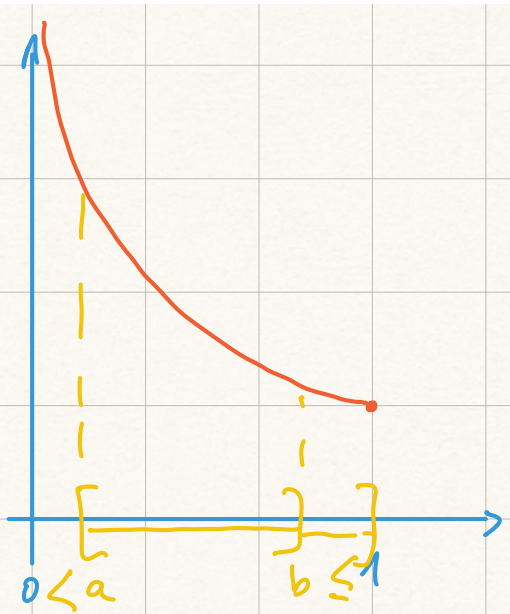
Définition. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.



Exemple. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0,1]$?

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$

$f_2 : x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$



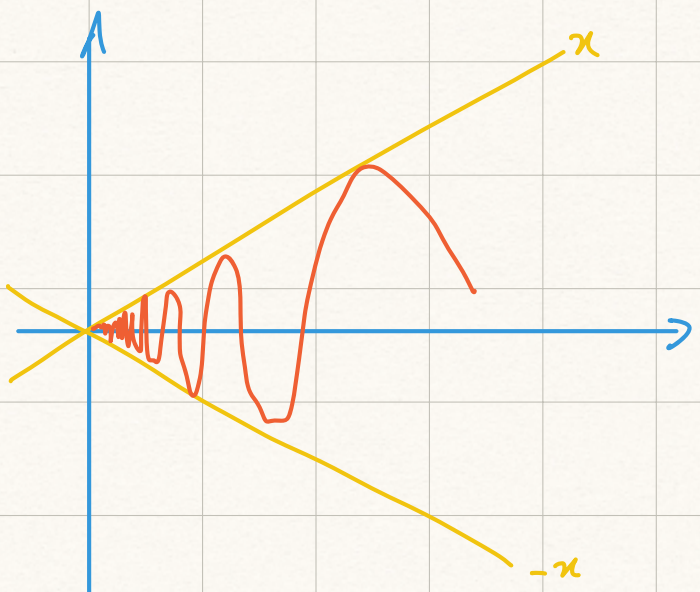
f_1 continue sur $]0,1]$ donc c.p.m.

$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

pas cpm sur $[0,1]$

car $f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x>0]{x\to 0} +\infty$

pas de limite finie en 0 à droite



f_2 continue sur $]0,1]$

donc continue par mcx.

(et même se prolonge par continuité en 0)



$\sin\frac{1}{n}$ n'a pas de limite en 0 à droite

pas cpm sur $[0,1]$

mais continue sur $]0,1]$

donc cpm sur $]0,1[$

f_4 ...

Proposition. Les fonctions continues sont continues par morceaux.

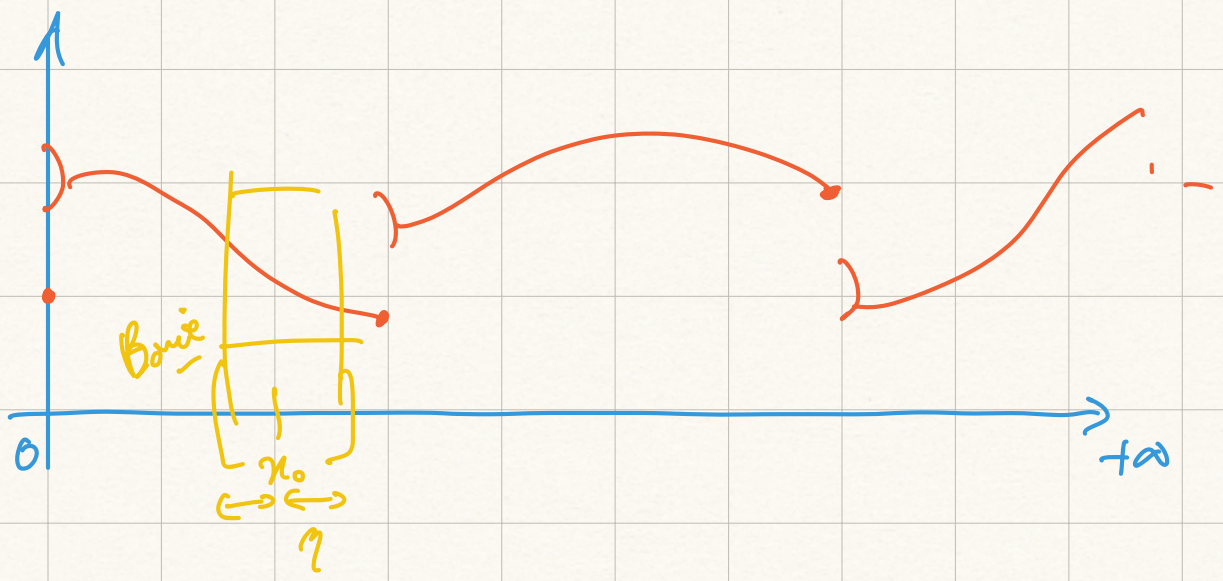
Proposition. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, i.e. :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta, x_0+\eta[} \text{ bornée}$$

ou encore :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0,\ \exists M \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)| \leqslant M$$

Preuve : Si f continue sur I intervalle,
alors f continue sur $[a,b) \subset I$
et f continue par morceaux sur $[a,b)$
(subd $\sigma = (a,b)$ adaptée)



1.2 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'**intégrale généralisée** :

$$\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

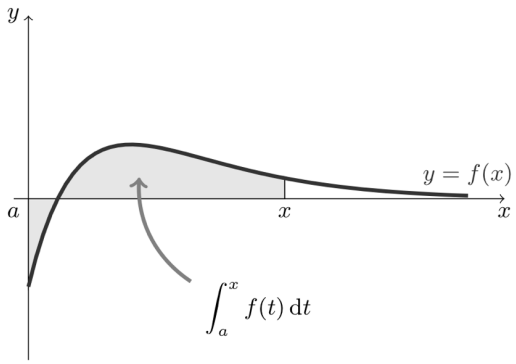
converge (ou existe) si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque. *L'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pourrait être appelée « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée.*

Interprétation géométrique :

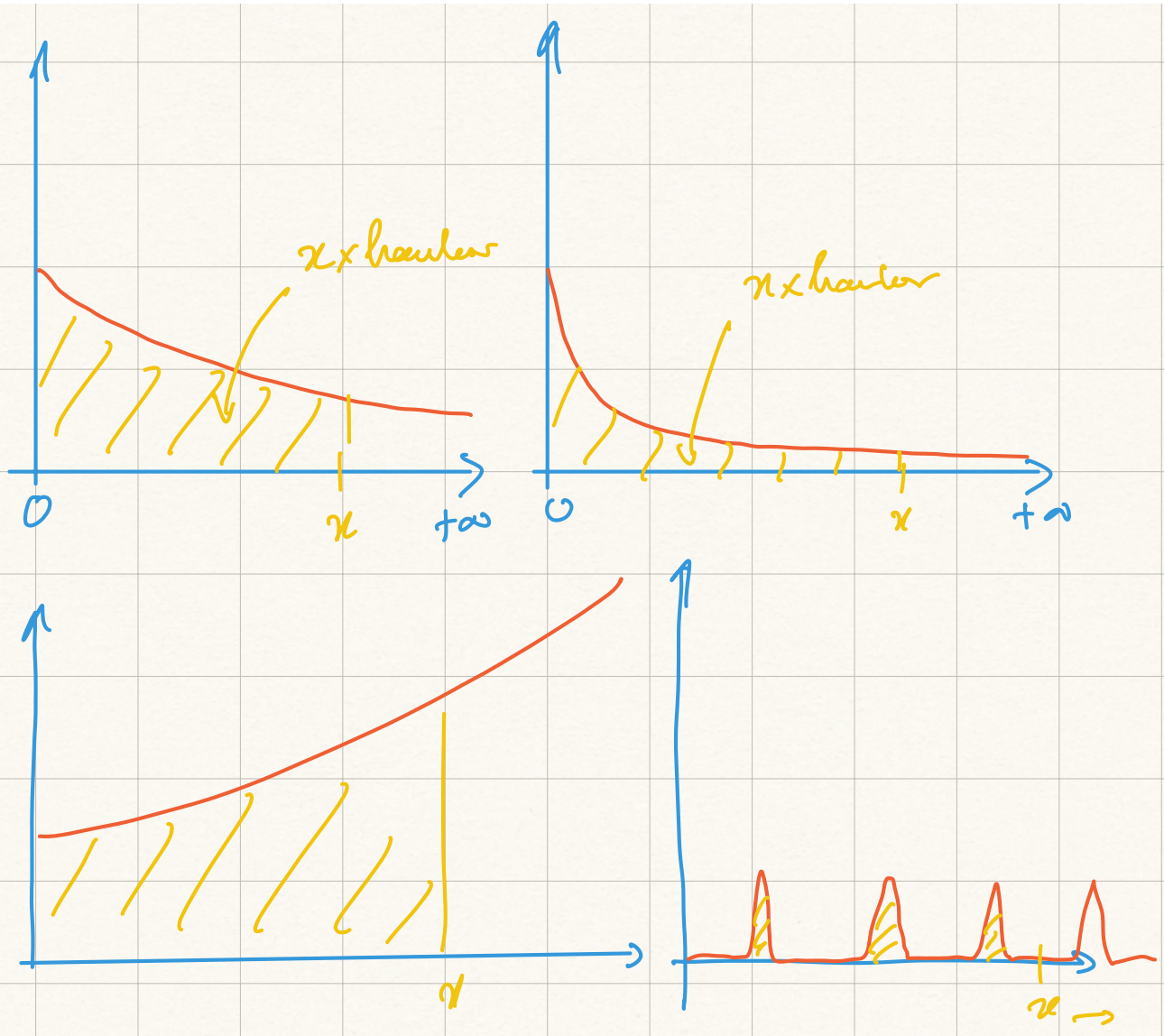


série $\sum u_n$

cv div

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ limite

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ somme



Caractère local de la convergence. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. La convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\dots}^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix dans $[a, +\infty[$ de la borne d'en bas.

Remarque. *Ainsi, on peut dès maintenant retenir que la convergence d'une intégrale généralisée en $+\infty$ dépend seulement du comportement de l'intégrande au voisinage de $+\infty$.*



Pour x au voisinage de $+\infty$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{cste}} + \int_b^x f(t)\,dt$$

Ces intégrales partielles ont une limite finie en même temps, ou pas de limite finie en même temps.

La convergence de $\int_{\dots}^{\to+\infty} f(t)\,dt$ dépend de f au voisinage de $+\infty$.

Proposition. Lorsque f est à valeurs complexes, $\int_a^{\to+\infty} f$ converge si et seulement si $\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent.

Exemple. Étudier la convergence de $\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On change d'écriture !

Notons $f(t) = e^{(i\omega-1)t}$

On passe par les intégrales partielles :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{(i\omega-1)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{i\omega-1} e^{(i\omega-1)t}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{i\omega-1}\left(\underbrace{e^{-x} e^{i\omega x}}_{\text{de module } e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - 1\right)$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{1-i\omega}$$

$$= \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$

donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \cos\omega t\, e^{-t}\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$

Exemple. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

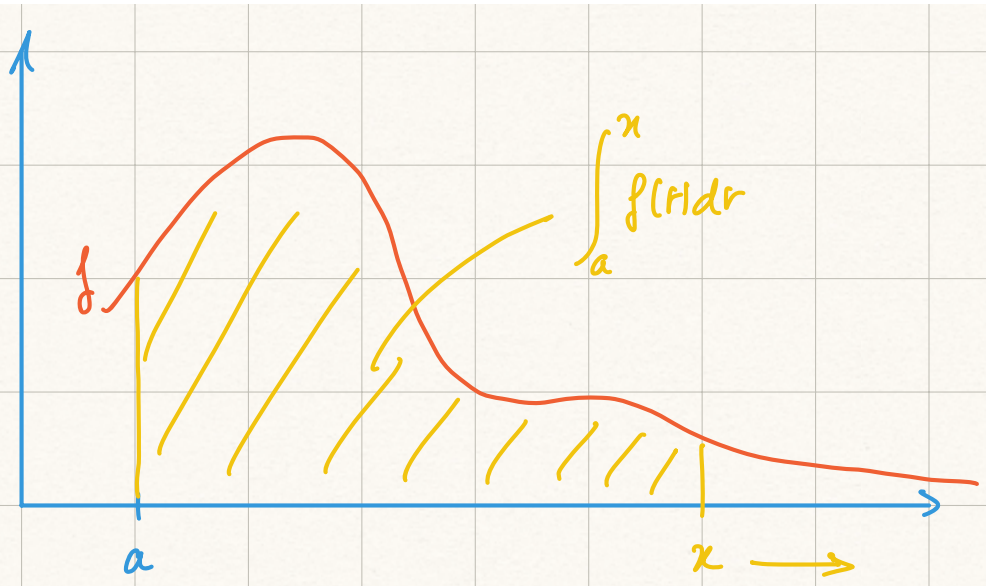
$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Les techniques d'étude de convergence seront étudiées un peu plus loin, et consisteront principalement à comparer l'intégrande à des fonctions de références. Pour les exemples qui précèdent, on travaille sur l'intégrale partielle, en revenant à la définition, ce qui ne sera pas le réflexe à avoir. Il s'agit en effet d'exemples (rares en pratique) où l'on peut exprimer une primitive de l'intégrande à l'aide des fonctions usuelles.*

1.3 Cas des fonctions positives

Lemme. Dans le cas où l'intégrande est à valeurs positives, l'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Remarque. *Lorsque f est positive, on autorise l'écriture $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.



$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante

en effet si $x < y$ $\quad \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)dt + \underbrace{\int_x^y f(t)dt}_{\geqslant 0}$

$$\geqslant \int_a^x f(t)\,dt$$

Donc, par limite monotone,

$\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite en $+\infty$,

finie ou $+\infty$

Rmq : Lorsque f est positive, on peut calculer dans $[a, +\infty] = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \begin{cases} \ell \\ \text{ou} \\ +\infty \end{cases}$

1.4 Primitive et intégrale généralisée

Proposition. Si f est continue sur $[a, +\infty[$, et que l'intégrale $\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale fonction de la borne d'en bas :

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée $x \mapsto -f(x)$.

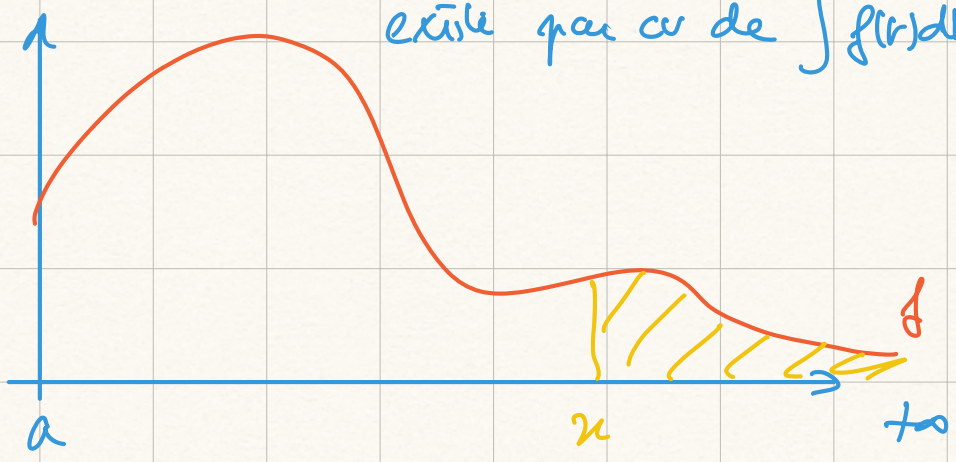
Si f continue sur $[a, +\infty[$,

$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f.

Si f continue continue sur $[a, +\infty[$, et $\int_a^{\to+\infty} f(t)dt$ converge

$x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ "le reste de l'intégrale"

existe par cv de $\int^{\to+\infty} f(t)dt$



ce reste est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $-f$.

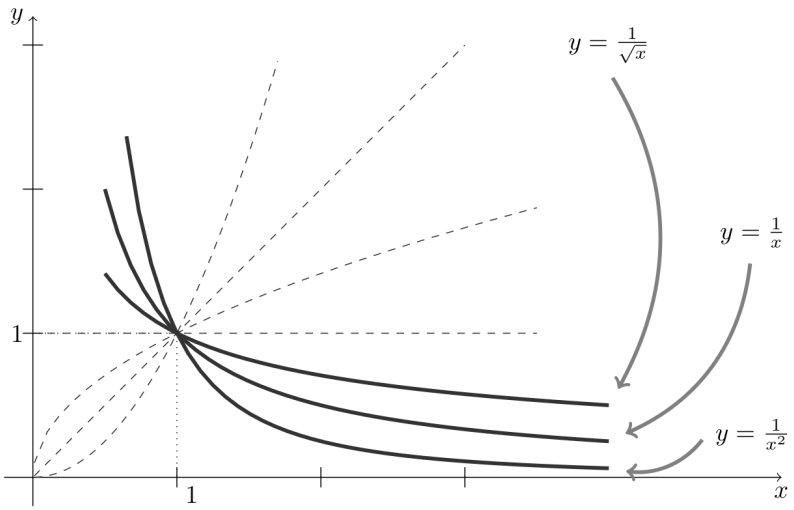
En effet :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt}_{\text{cte}} - \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{de dérivée } -f}.$$

2.3 Exemples de référence

Intégrales de Riemann en $+\infty$.

L'intégrale généralisée $\int_{\nearrow}^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.



$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$

Preuve : par les intégrales partielles.

1er cas : $\alpha = 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $\int_{\to+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge

2e cas $\alpha \neq 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{1-\alpha}\, t^{-\alpha+1}\right]_1^x$$

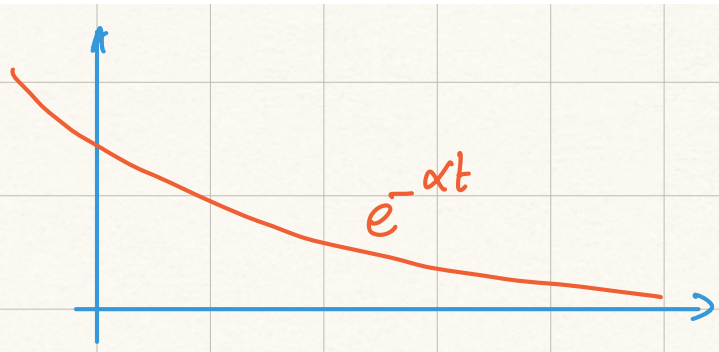
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ si $\alpha - 1 < 0$ ie $\alpha < 1$

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha - 1 > 0$ ie $\alpha > 1$

Exponentielle en $+\infty$.

L'intégrale généralisée $\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.



Preuve : par les intégrales partielles.

Cas $\alpha \neq 0$ $\quad \displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x} - 1\right)$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 0$ $\quad \displaystyle\int_0^x e^{-0t}\,dt = x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Rmq : $\sum x^n$ cv $\iff |x| < 1$

$\sum e^{-\alpha n}$ cv $\iff |e^{-\alpha}| < 1 \iff \alpha > 0$

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

2.5 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ dont on connaît une primitive F.

L'intégrale $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie ℓ en $+\infty$

Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^{t\to+\infty} = \ell - F(a)$$

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

Exemple. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}$.

Preuve: par les intégrales partielles

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^x$$
$$= F(x) - F(a)$$

Lorsque $x \to +\infty$ $\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie

ssi $F(x)$ a une limite finie

Dans ce cas, à la limite :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^{t\to+\infty}$$

Exemple. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}$.

M1 Par les intégrales partielles :

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+3t+2} = \cdots$$

Ou par les ~~sommes~~ partielles.

n2 On applique le théorème.

On calcule, sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+3t+2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+1)}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\,dt$$

$t+1>0$
$t+2>0$

$$= \Big[\ln(t+1) - \ln(t+2)\Big]_0^{t\to+\infty}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)\right]_0^{t\to+\infty}$$

$$= 0 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

↑ on a justifié la cv de l'intégrale

$$= \ln 2.$$

Th : Si u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

alors $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$

$$= \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$$

2.5.3 Intégration par parties

une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de n.

Théorème.

Si :

- f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$
- $f(t)g(t)$ admet une limite finie en $+\infty$

Alors :

- les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature (convergente ou divergente)
- en cas de convergence :

$$\int_a^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^{t\to+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, on ne vérifie pas les hypothèses de régularité. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^{+\infty} \overset{\nearrow}{u}(t)\overset{\searrow}{v}(t)\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. U désigne une primitive de u.
La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.

Exemple. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Brouillon

I_n existe ? $= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ → par parties légitime ?

$= -\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t}\,dt$ $\quad I_{n-1}$

Calculons, par parties, sous réserve de limite finie du crochet et de convergence d'une intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$$

$u = t^n \quad u' = n t^{n-1}$

$v' = e^{-t} \quad v = -e^{-t}$

$$= \underbrace{\left[t^n (-) e^{-t} \right]_0^{t \to +\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} n t^{n-1} (-) e^{-t}\, dt$$

$n \geq 1$

$$= 0 - 0 + n I_{n-1}$$

Or ! $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge ie I_0 existe et vaut $I_0 = 1$

Donc, par récurrence, I_n existe et vaut $n!$

- I_0 existe et vaut $1 = 0!$
- On suppose, pour $n \geq 1$, I_{n-1} existe et vaut $(n-1)!$

Alors, par l'intégration par parties, on a montré : I_n existe et vaut

$$I_n = n I_{n-1}$$
$$= n (n-1)!$$
$$= n!$$

3.3 Techniques d'étude

Remarque. *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne*

L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce voisinage.

L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même.

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

Si $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Théorème.

Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et f, g positives et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Remarque. *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et f, g positives et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Par les intégrales partielles.

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{(car } g \geqslant 0\text{)}$$

$$\leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{cste indép de } x$$

croissant en x par positivité de f

Par limite monotone $\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie pour $x \to +\infty$.

Exemple. Étudier la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ où f est :

$t \mapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$ $\quad$ $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ $\quad$ $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$

$t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^3}$ $\quad$ $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$

Au voisinage de $t \to +\infty$:

- $0 \leq \dfrac{2t}{1+t^3}$ et $\dfrac{2t}{1+t^3} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ou $\sim \dfrac{2}{t^2}$

et $\int^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann, $2>1$)

donc $\int^{+\infty} \dfrac{2t}{1+t^3}\,dt$ converge.

- $0 \leq \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ et $\dfrac{\sqrt{t}}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

où $\int^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge (Riemann $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$)

donc $\int^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$ diverge

- $0 \leq e^{-\sqrt{t}}$ $\quad$ $e^{-\ln t} = \dfrac{1}{t}$ d'intégrale div

$e^{-2\ln t} = \dfrac{1}{t^2}$ d'intégrale cv

et $e^{-\sqrt{t}} \leq e^{-2\ln t}$ car $\sqrt{t} \geqslant 2\ln t$ au voisinage de $+\infty$

ie $e^{-\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$ d'intégrale cv en $+\infty$.