Pour me : 260.32, 260.33

$u \in \mathcal{L}(E)$ où E de dim finie

u trigonalisable $\iff \exists \mathcal{B}$ t.q. $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\iff \chi_u$ scindé

$\iff \pi_u$ scindé

$\iff \exists P$ polynôme annulateur scindé.

en particulier, si E est un $\mathbb{C}$-ev, u trigonalisable

Si E est un $\mathbb{R}$-ev

↳ on peut regarder $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

A trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\sum \text{vp} = \mathrm{tr}\, u$$

5 Nilpotence

5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de u.

Remarque. *Ainsi, si u est nilpotent d'indice m, on a :*

$$u^m = 0 \quad et \quad u^{m-1} \neq 0$$

5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- u est nilpotent $\iff \chi_u = X^n$
- u est nilpotent d'indice m $\iff \pi_u = X^m$

Corollaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n$$

Preuve : Ngpe u nilpotent $\iff \chi_u = X^n$

$\Leftarrow$ Par le th de Cayley-Hamilton, $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\Rightarrow$ $\exists k$ t.q. $u^k = 0$ donc X^k annulateur de u

donc $\pi_u \mid X^k$

donc le seul facteur irréductible de π_u est X

donc le seul facteur irréductible de χ_u est X

en conséquence : $\chi_u = X^n$ (de degré n).

à rédiger

Ngpe u nilpotent d'indice m $\iff \pi_u = X^m$

$\Rightarrow$ On suppose $u^m = 0$ et $u^{m-1} \neq 0$

donc X^m annulateur de u et pas X^{m-1}

$\Pi_u \mid X^m$ et $\Pi_u \nmid X^{m-1}$

donc $\Pi_u = X^m$

$\Leftarrow$ Si $\Pi_u = X^m$, c'est que $\Pi_u(u) = 0$

ie $u^m = 0$

et $X^{m-1} \mid \Pi_u$ et $X^{m-1} \neq \Pi$

donc $u^{m-1} \neq 0$

(minimalité)

5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

Preuve: $\Rightarrow$ On suppose u nilpotent

donc $\chi_u = X^n$ scindé

donc u trigonalisable.

et $Sp(u) = \{$ racines de $\chi_u \} = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Si u trigonalisable, et $Sp(u) = \{0\}$,

$\exists B$ base de E tq

$Mat(u, B) =$ $\begin{pmatrix} \times 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & & * \\ | & \diagdown & \\ 0 & — & 0 \end{pmatrix} \leftarrow T$

$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ | & \diagdown & & \\ 0 & — & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & * \\ | & \diagdown & \diagdown & & \\ 0 & — & — & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $T^n = 0$

$\begin{cases} u(e_1) = 0 \\ u(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1) \\ u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \\ \vdots \\ u(e_n) \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_{n-1}) \end{cases}$

5.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$A^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de A.

Remarque. *Ainsi, si A est nilpotent d'indice m, on a :*

$$A^m = 0 \quad et \quad A^{m-1} \neq 0$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A est nilpotent $\iff \chi_A = X^n$
- A est nilpotent d'indice m $\iff \pi_A = X^m$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n$$

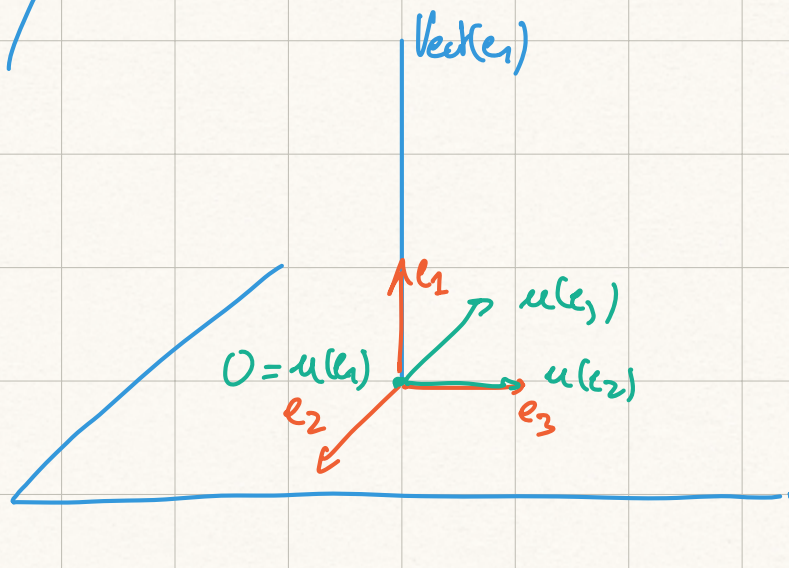
Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

Corollaire. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre réelle 0, et pourtant n'est pas nilpotente.

Remarque. *Une matrice nilpotente n'est pas toujours triangulaire. Par exemple,* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *est nilpotente.*



0 est vp.
C'est la seule.

$$A^4 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & I_2 \end{array}\right)$$

A non nilpotente

$$\chi_A = \left|\begin{array}{c|cc} X & 0 & 0 \\ \hline 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & X \end{array}\right|$$

dév L_1

$$= X\left(X^2+1\right)$$

non scindé dans $\mathbb{R}[X]$

donc A non trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Pourtant $Sp(A) = \{0\}$.

Rmq : si on considère $A \in M_3(\mathbb{C})$

$$\chi_A = X(X-i)(X+i)$$ scindé strict

donc A diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

Attention :

u nilpotent $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

~~$\Leftarrow \forall \mathcal{B}$~~ $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

A nilpotent $\Leftrightarrow$ ~~$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$~~

$\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$

t.q. $A = P \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

Par ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A nilpotente non triangulaire.

Rmq : $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X+1 \end{vmatrix}$

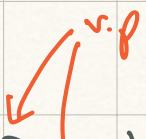
$= (X^2 - 1) + 1$

$= X^2$

0 seule v.p.

A diagonalisable ?

Si oui, A semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A = 0$ absurde.



Si oui, Π_A scindé sinon donc $\Pi_A = X$

donc $A = 0$ absurde.

$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de dim 1.

u diagonalisable $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

$\iff \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$

$\iff \chi_u$ scindé et

$\forall \lambda \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

(on a toujours $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$)

u pas diagonalisable

signifie $\exists \lambda \in Sp(u)$ $E_\lambda(u)$ est trop petit.

6 Sous-espaces caractéristiques

6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u, de multiplicité m_λ, on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$$

Proposition. Avec les notations de la définition, lorsque χ_u est scindé :

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$
- $N_\lambda(u)$ est stable par u
- $N_\lambda(u)$ est de dimension m_λ
- En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, on a $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

- $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

  $\subset \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$ ↓ croissance des noyaux itérés

  $= N_\lambda(u)$

en effet : Si $x \in \operatorname{Ker}(v)$ et $m \geq 1$

alors $v^m(x) = v^{m-1}(v(x))$

$= v^{m-1}(0)$

$= 0$

- $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda} \in \mathbb{K}[u]$

donc commute avec u donc son noyau est stable par u : $N_\lambda(u)$ est stable par u.

Chouette !

On peut définir l'endomorphisme induit par u sur

$N_\lambda(u)$: $\quad u_\lambda : N_\lambda(u) \longrightarrow N_\lambda(u)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \longmapsto u(x)$

- * si $x \in N_\lambda(u)$, $(u - \lambda Id_E)^{m_\lambda}(x) = 0$

  donc $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ est annulateur de u_λ

  donc $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{\dim N_\lambda(u)}$

  Or u_λ est un endom. induit de u

  donc $\chi_{u_\lambda} \mid \chi_u$

  car, en base adaptée $\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}(u_\lambda) & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$

  Or m_λ est la multiplicité de λ racine de χ_u

  donc $\underline{\dim N_\lambda(u) \leq m_\lambda}$

* χ_u scindé, donc

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$$

où les $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux

Par le lemme des noyaux :

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(\chi_u(u))}_{E} = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \underbrace{\mathrm{Ker}\left((u-\lambda Id_E)^{m_\lambda}\right)}_{N_\lambda(u)}$$

par Cayley-Hamilton

Bref, pour χ_u scindé, $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$

donc $n = \dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim N_\lambda(u)$

$\| $

$\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda$ car χ_u est scindé.

donc $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \left(m_\lambda - \dim N_\lambda(u) \right) = 0$

Somme nulle de termes positifs

donc $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m_\lambda = \dim N_\lambda(u)$.

- $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{\dim N_\lambda(u)}$
$= (X-\lambda)^{m_\lambda}$

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, il existe une base de E dans laquelle u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \star \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \begin{pmatrix} \lambda_r & \cdots & \star \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \lambda_r \end{pmatrix}_{m_r} \end{pmatrix}$$

Preuve : Pour $i \in \{1..r\}$, on note B_i base de $N_{\lambda_i}(u)$ tq $\mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, B_i)$ triangulaire supérieure, notée A_i

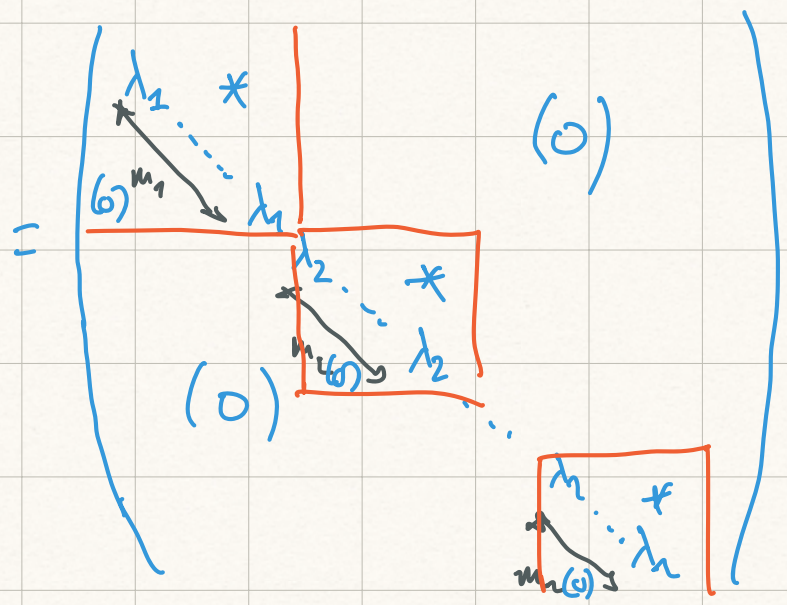
Comme λ_i est la seule vp de u_{λ_i}

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

Avec $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_r)$, comme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(u)$ et que les $N_{\lambda_i}(u)$ sont stables par u

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(u_{\lambda_1}, B_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{Mat}(u_{\lambda_r}, B_r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_2 \end{pmatrix}$$



Example:

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & (0) & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & 2 & 0 & & \\ & & & 0 & 2 & & \\ \hline & (0) & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$E = \underbrace{N_1(u)}_{\dim 3} \oplus \underbrace{N_2(u)}_{\dim 2} \oplus \underbrace{N_3(u)}_{\dim 2}$$

$$E_1(u) \cap \qquad E_2(u) \cap \qquad E_3(u) \cap$$

$$\mathrm{Mat}(u_2, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2(u) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2) = N_2(u)$$

$$\mathrm{Mat}(u_3, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(u) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_3) = N_3(u)$$

$\uparrow$ (u_3 non diagonalisable)

de dim 1, engendré par le 1er vecteur de $\mathcal{B}_3$

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 & * & \\ & & & & \ddots & \\ & & & (0) & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n & * \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, \mathcal{B}_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_i I_{m_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } R_i}$$

$= \lambda_i I_{m_i} + R_i$

↑ nilpotente
(triangulaire sup, diag nulle)

Donc $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_2 I_{m_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & R_2 \end{pmatrix}$

diagonale + nilpotente

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, dans toute base de E adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(u)$, u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont nilpotentes.

Preuve :

Soit $\mathcal{B}_i$ base de $N_{\lambda_i}(u)$ $\qquad \mathcal{B} = (\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_r)$

$A_i = \mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, \mathcal{B}_i)$

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

$$A_i = \lambda_i I_{m_i} + \underbrace{(A_i - \lambda_i I_{m_i})}_{\text{noté } R_i}$$

or $\chi_{u_{\lambda_i}} = (X - \lambda_i)^{m_i}$ annulateur de u_{λ_i}

par Cayley-Hamilton

donc $(u_{\lambda_i} - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i} = 0$

ie $R_i^{m_i} = 0$

donc les R_i sont nilpotents.

(et pas nécessairement triangulaire ici !)

6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si λ est une valeur propre de A, de multiplicité m_λ, on appelle **sous-espace caractéristique de A associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(A) = \operatorname{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right)$$

Proposition. Avec les notations de la définition : si χ_A scindé.

- $E_\lambda(A) \subset N_\lambda(A)$
- $N_\lambda(A)$ est de dimension m_λ

Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé. Alors :

$$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} N_\lambda(A)$$

De plus, en notant :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont triangulaires supérieures strictes.

On les R_i sont nilpotentes.