

4 Trigonalisabilité

4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Preuve: • χ_u scindé $\Rightarrow \pi_u$ scindé

en effet: $\Rightarrow$ Si χ_u scindé, $\pi_u \mid \chi_u$ donc π_u scindé

$\Leftarrow$

Preuve u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé

$\Rightarrow$ On suppose u trigonalisable

donc $\exists \mathcal{B}$ base de E ζ $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) =$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \chi_u &= \begin{vmatrix} X - \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & X - \lambda_n \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad \text{scindé.} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ On raisonne par récurrence sur $\dim E$.

• Si $\dim E = 1$, χ_u scindé et u trigonalisable

• Soit E ev de dim $(n+1)$, $n \geq 1$

On suppose que deux tout ev de dim n ,

χ_n scindé $\Rightarrow$ n trigonalisable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u scindé.

Soit λ_1 une racine de χ_u (existe car χ_u scindé)

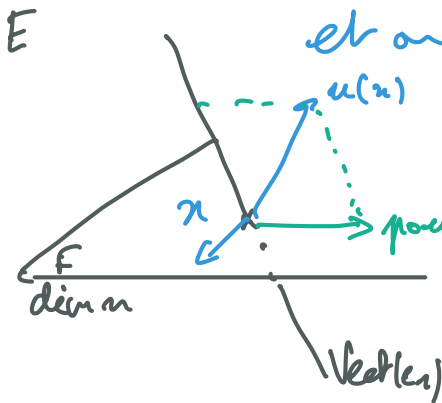
c'est un vp. Donc $\exists e_1 \neq 0$ tq $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

On complète (e_1) en $B = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ base de E

et on pose $F = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$

$$E = \text{Vect}(e_1) \oplus \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$$

~~On note u_F l'endomorphisme par u sur F .~~



$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_{n+1}) \\ \lambda_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \hline 0 & & A & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{matrix}$$

On note p le projecteur sur F de direction $\text{Vect}(e_1)$.

$$p \circ u(e_1) = p(\lambda_1 e_1) = 0$$

$$p \circ u(e_k) = p(a_2 e_2 + \underbrace{y_k}_{\in F}) = y_k$$

$$\text{Donc } \text{Mat}(\varphi_{\text{ou}}, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

F est stable par φ_{ou} . On considère l'endomorphisme induit par φ_{ou} sur F $(\varphi_{\text{ou}})_F$, et

$$\text{Mat}((\varphi_{\text{ou}})_F, B_1) = A \quad \text{où } B_1 = (e_2, \dots, e_{n+1})$$

$$\text{HR } (\varphi_{\text{ou}})_F \in \mathcal{L}(F) \quad \dim F = n$$

$$\chi_{(\varphi_{\text{ou}})_F} \text{ scindé ?} \quad \chi_A \text{ scindé ?}$$

scindé

$$\rightarrow \chi_u = \chi_{\text{Mat}(u, B)} = (X - \lambda_1) \chi_A(X)$$

donc χ_A scindé

par HR, on a donc $(\varphi_{\text{ou}})_F$ trigonalisable

ie $\exists B'_1 = (e'_2, \dots, e'_{n+1})$ base de F

$$\text{Alors } \text{Mat}((\varphi_{\text{ou}})_F, B'_1) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ & \ddots \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = A_2$$

Nb, $B' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ base de E

(concaténation de (e_1) et B'_1)

On a $\varphi_{\text{ou}}(e_k)$ est donné par A_1

la composante dans F de $u(e'_2)$

$$\text{donc } u(e'_2) = \underbrace{b_2 e_1}_{\in \text{Vect}(e_1)} + \underbrace{\rho u(e'_2)}_{\in F}$$

décomposition selon $\text{Vect}(e_1) \oplus F$

$$\begin{aligned} \text{Mat}(u, \mathcal{B}') &= \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e'_2) & \dots & u(e'_{n+1}) \\ \lambda_1 & b_2 & & b_{n+1} \\ 0 & & & \\ | & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{n+1} \end{matrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & \dots & b_{n+1} \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ | & & \ddots & \\ 0 & & (0) & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

triangulaire supérieure.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, i.e. si χ_u est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) \lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

χ_n a rom račius b. sp. avec multiplicites.

$$\exists B \text{ s.t. } \text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_p \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_p \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

denn $\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n m(\lambda_k) \lambda_k$

$$\det(u) = \prod_{\lambda \in \lambda_2} \lambda_2^{m(\lambda_2)}$$

et $\chi_n = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$ (saids)

rel. coeff. facts:

$$a_n = 1 \quad a_{n-1} = -\text{tr}(u) \quad a_0 = (-1)^n \det(u)$$

Cher retour :

$$\chi_u = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$$

4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure, } \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), A = PTP^{-1}$$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, i.e. si χ_A est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

