

bon ve: 260.27, 260.30

À rédiger pour le 26 octobre

250.10

250.11

260.22

260.23

260.24

lundi 2 novembre : DS 2 4h

$u \in \mathcal{L}(E)$ E de dim finie

u diagonalisable $\Leftrightarrow \exists B$ base $\mathcal{L} \text{ Mat}(u, B)$ diagonale

$\Leftrightarrow \exists B$ base de vecteurs propres de u

$$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$$

$$\Leftrightarrow \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \lambda \in \text{Sp}(u) & \dim E_{\lambda}(u) = m(\lambda) \\ \chi_u \text{ scindé} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists P \text{ polynôme scindé simple } \mathcal{L} P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\Leftrightarrow \Pi_u \text{ scindé simple}$$

$$\Leftrightarrow \Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

u diagonalisable $\Leftarrow \chi_u$ scindé simple



↑ pour α une homothétie

Que dire si $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$

Dans ce cas u diagonalisable $\Leftrightarrow \exists B$ base q $\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow E = E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$$

$$\Leftrightarrow \Pi_u = (X - \lambda)$$

Dans les 3 cas, on a écrit $u = \lambda \text{Id}_E$ homothétie

Les seuls endomorphismes diagonalisables avec 1 seule vp sont les homothéties.

Lemme des noyaux

260.1

(a) $u \circ v = v \circ u$ donc $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$ stable par u

Soit $x \in E_\lambda(v)$ Alors $u(x) \in E_\lambda(v)$

$$v(u(x)) = u(v(x))$$

$$= u(\lambda x)$$

$$= \lambda u(x) \quad \text{donc } u(x) \in E_\lambda(v)$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de v

(b) Notons $u_k : E_{\lambda_k}(v) \longrightarrow E_{\lambda_k}(v)$ endom. induit
 $x \longmapsto u(x)$

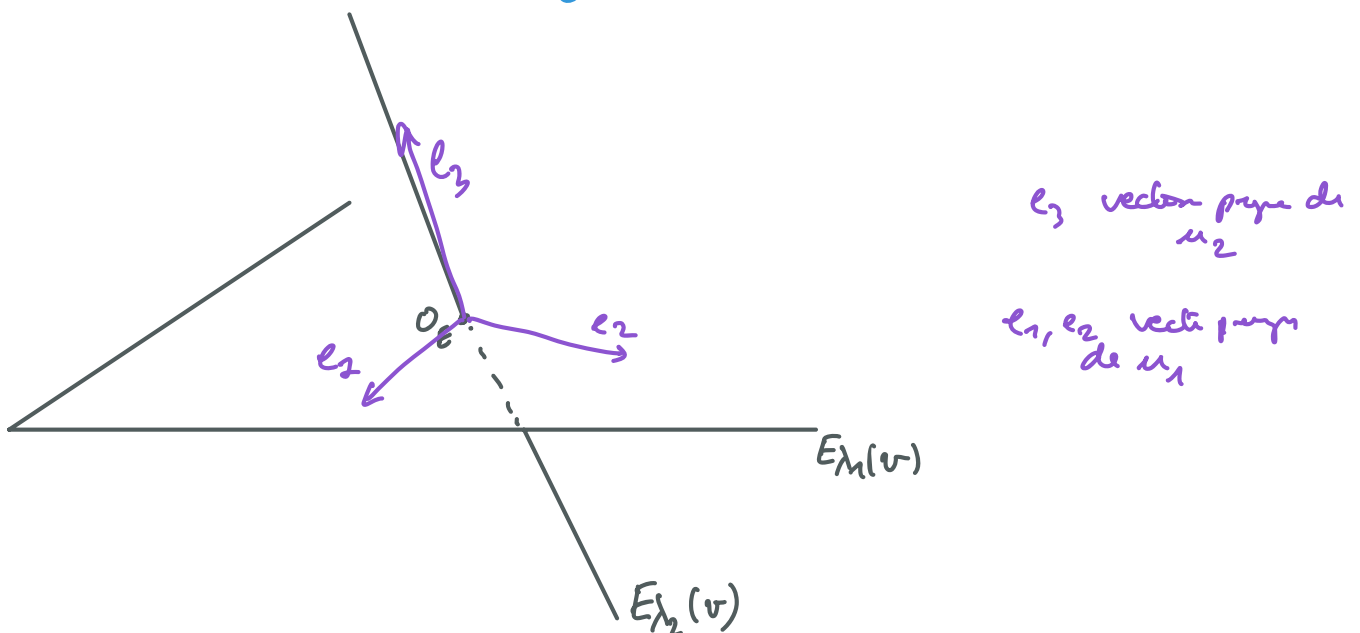
u diagonalisable donc $\exists P$ scindé simple tq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$$\text{i.e. } \forall x \in E \quad P(u)(x) = 0_E$$

donc en part $\forall x \in E_{\lambda_k}(v)$

$$\begin{aligned} P(u_k)(x) &= P(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc P est annulateur de u_k , scindé simple
 donc u_k diagonalisable.



(c) On note $m_k = \dim E_{\lambda_k}(v)$

B_k une base de $E_{\lambda_k}(v)$ formée de vecteurs
 propres de u_k , et donc de u .
 (existe car u_k diagonalisable)

les vecteurs de B_k sont des $E_{\lambda_k}(v)$ donc
vecteurs propres de v .

Or v diagonalisable donc $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(v)$

par concaténation de bases,

$B = (B_1, \dots, B_p)$ est une base de E

formée de vecteurs propres de u et de v .

$$\text{Rang: } \text{Mat}(v, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \lambda_2 I_{m_2} & \\ & (0) & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & D_2 & \\ & (0) & D_p \end{pmatrix}$$

$\text{Mat}(u_1, B_1)$ $\rightarrow$ D_1
 $\text{Mat}(u_2, B_2)$ $\rightarrow$ D_2

Bref: Si u, v commutent et sont diagonalisables,

on peut trouver une base commune de vecteurs propres.