

sur je 260.2, 260.4, 260.13, 260.16

Réduction des endomorphismes et des matrices

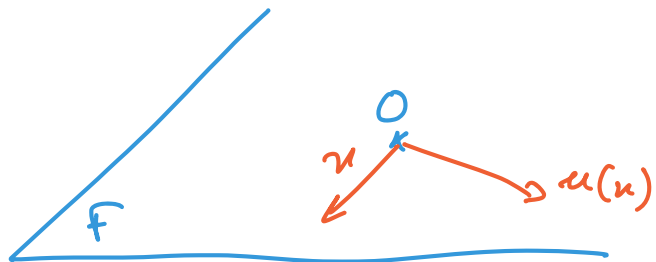
Je me souviens

1. Que signifie : « F est stable par u » ?
2. Que peut-on définir lorsque F est stable par u ? Comment cela se traduit matriciellement ?

$u: E \rightarrow E$ linéaire

① $\forall x \in F, u(x) \in F$

② On peut définir $u_F: F \rightarrow F$
 $x \mapsto u(x)$



$(B_1, \dots)$

Soit B base de E adaptée à F

$\text{Mat}(u_F, B_1)$

$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

1.1 Cas des endomorphismes

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Remarque. Rappelons que $P(u)$ désigne un endomorphisme, que l'on évalue en x . Ça n'aurait aucun sens de chercher à évaluer P en le vecteur $u(x)$.

Preuve. • Cas où $P = X^k$

$$\text{par récurrence, } u^k(x) = u \circ u \circ \dots \circ u(x) \\ = \lambda^k x$$

$$\bullet \text{ Cas où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k u^k \right)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x \\ &= P(\lambda) x \end{aligned}$$

Proposition. Si P est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de u est racine de P .

Si P annulateur de u
alors $Sp(u) \subset \text{rac}(P)$

Les vp de u sont à chercher parmi les racines de P .

Preuve: Soit $\lambda \in Sp(u)$

$x \neq 0$ vecteur propre associé : $u(x) = \lambda x$.

Alors

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= P(\lambda)x \\ &\parallel \\ &O_{\mathcal{L}(E)}(x) \\ &\parallel \\ &O_E \end{aligned}$$

or $x \neq O_E$ donc $P(\lambda) = 0$

donc $\lambda \in \text{rac}(P)$

Exemple

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ | & & | \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ$$

donc $P = X^2 - nX$ est annulateur de J

$$= X(X - n)$$

donc $Sp(J) \subset \{0, n\}$



3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est annulateur de u .

Corollaire. Si E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- $\pi_u \mid \chi_u$
- $\deg(\pi_u) \leq n$

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

preuve en annexe

Rappel les vp de u sont les racines de χ_u

Proposition. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal π_u .

Corollaire. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les polynôme caractéristique χ_u et le polynôme minimal π_u ont les mêmes racines.

Preuve: Montrons que $Sp(u) = \text{rac}(\pi_u)$

- π_u est annulateur de u donc $Sp(u) \subset \text{rac}(\pi_u)$
- Par le th de Cayley-Hamilton

$$\pi_u \mid \chi_u$$

$$\text{donc } \text{rac}(\pi_u) \subset \text{rac}(\chi_u)$$

$$Sp''(u) \text{ par déf de } \chi_u$$

Remarque. En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si P est annulateur de u , les valeurs propres sont parmi les racines de P

Exemple. On considère un projecteur p d'un espace vectoriel de dimension finie. Calculer son polynôme caractéristique χ_p , son polynôme minimal π_p et donner un autre polynôme, annulateur de p .

$$r = \operatorname{rg}(p) = \dim E_1(p)$$

$$E = E_1(p) \oplus E_0(p)$$

Dans une base adaptée

$$M_{\text{rel}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\chi_p(x) = \begin{vmatrix} xI_r - I_r & 0 \\ 0 & xI_{n-r} \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^r x^{n-r}$$

On suppose $0 < r < n$ donc $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$

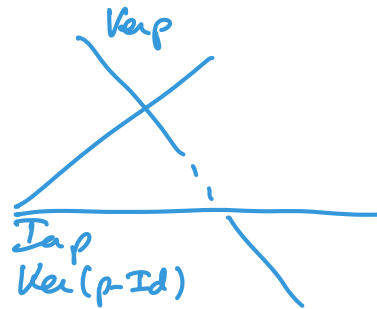
On va que $\pi_p = x(x-1)$ ($p \circ p - p = 0$)

les pol. annulateurs de p sont les multiples de π_p

par exemple: $x(x-1)(x-2)$

$$x^2(x-1)^3$$

$\vdots$



1.2 Cas des matrices

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $AX = \lambda X$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Proposition. Si P est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P .

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les valeurs propres de A sont les racines du polynôme minimal π_A .

Corollaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal π_A ont les mêmes racines.

Remarque. En résumé :

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- Si P est annulateur de A , les valeurs propres sont parmi les racines de P

Exemple. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ remplie de 1. Calculer son polynôme caractéristique χ_J , son polynôme minimal π_J et donner un autre polynôme, annulateur de J .

Exemple. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet \chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1 & & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & X & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & X \end{vmatrix} \\ &= X^n \end{aligned}$$

Rmq: par le th de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$
donc A nilpotente.

Rmq Si B nilpotente, $\exists p$ tq $B^p = 0$

donc X^p est annulateur de B

donc 0 est la seule vp possible de B

donc $\chi_B = X^n$ donc $B^n = 0$

donc l'indice de nilpotence est $\leq n$

$\pi_A \mid \chi_A = X^n$ donc $\exists p \leq n$ tq $\pi_A = X^p$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & X & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & X \end{pmatrix}$$

$n(n-1)/2 \dots n(n-1)/2$

e_1
 $\vdots$
 i
 e_{n-1}
 e_n

A canoniquement associée à u , $B = (e_1 \dots e_n)$ base canonique de K^n

$$\begin{cases} \forall i \geq 2 & u(e_i) = e_{i-1} \\ u(e_1) = 0 \end{cases}$$

per ric:

$$\begin{cases} \forall i \geq k+1 & u^k(e_i) = e_{i-k} \\ \forall i \leq k & u^k(e_i) = 0 \end{cases}$$

donc $A^k =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u^k(e_2) & u^k(e_{k+1}) & \dots & u^k(e_n) \\ e_1 \end{matrix}$$

ainsi $A^k \neq 0 \quad \forall k \leq n-1$

$$A^n = 0$$

Donc $\Pi_A = X^n$

2 Lemme de décomposition des noyaux

2.1 Le théorème

"Lemme des noyaux"

Lemme de décomposition des noyaux.

Soit P_1, P_2 deux polynômes, que l'on suppose premiers entre eux ($P_1 \wedge P_2 = 1$). On note $P = P_1 P_2$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$$

Remarque. On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u .

Preuve: • $P_1 \wedge P_2 = 1$

$$\text{donc } \exists V_1, V_2 \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

• Montrer que la somme est directe $(P_1 V_1 + P_2 V_2)(u) = 1(u) = \text{Id}_E$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker}(P_1(u)) \cap \text{Ker}(P_2(u))$$

$$\text{Alors } x = \text{Id}(x)$$

$$= (P_1 V_1 + P_2 V_2)(u)(x)$$

$$= (V_1(u) \circ P_1(u))(x) + (V_2(u) \circ P_2(u))(x)$$

$$= V_1(u)(0) + V_2(u)(0)$$

$$= 0 \quad \text{car } x \in \text{Ker } P_i(u) \quad i=1,2$$

• Montrer que $\text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) \subset \text{Ker } P(u)$

$$\text{Soit } x_1 \in \text{Ker } P_1(u) \text{ et } x_2 \in \text{Ker } P_2(u)$$

$$P(u)(x_1 + x_2) = (P_1 P_2)(u)(x_1) + (P_1 P_2)(u)(x_2)$$

$$= (P_2(u) \circ P_1(u))(x_1) + (P_1(u) \circ P_2(u))(x_2)$$

$$= P_2(u)(0) + P_1(u)(0)$$

$$\text{car } x_i \in \text{Ker } P_i(u) \quad i=1,2$$

$$= 0$$

• Montrer $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u)$

Soit $x \in \text{Ker } P(u)$

Par la relatⁿ de Bezout

$$x = \text{Id}_E(x)$$

$$= (P_1 V_1 + P_2 V_2)(u)(x)$$

$$= \underbrace{P_1(u) \circ V_1(u)(x)}_{\text{noté } x_2} + \underbrace{P_2(u) \circ V_2(u)(x)}_{\text{noté } x_1}$$

$$\text{et } P_2(u)(x_2) = P_2(u) \circ P_1(u) \circ V_1(u)(x)$$

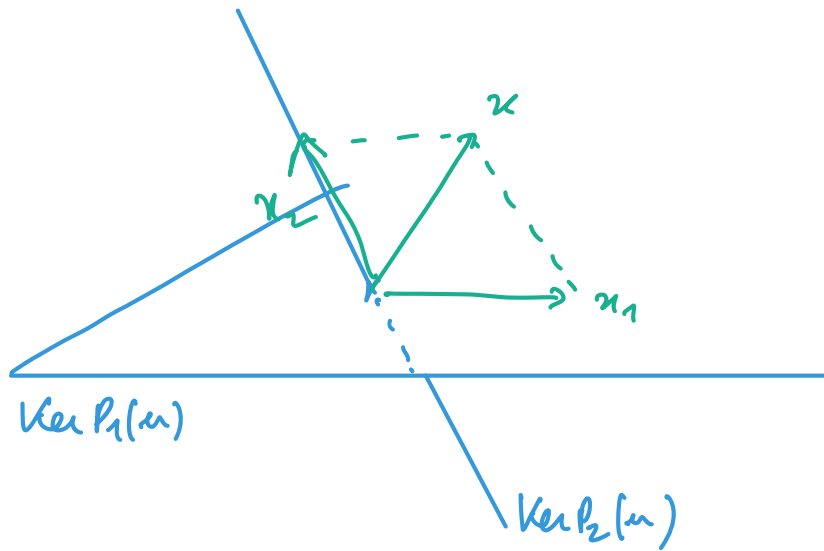
$$\begin{aligned} & V_1(u) \circ P(u) \\ & \parallel \\ & (V_1 \times P)(u) \\ & \mathbb{K}[u] \end{aligned}$$

$$= (V_1(u) \circ P(u))(x)$$

$$= V_1(u)(0) \quad \text{car } x \in \text{Ker } P(u)$$

$$\text{donc } x_2 \in \text{Ker } P_2(u)$$

$$\text{et de même } x_1 \in \text{Ker } P_1(u)$$



gros en
 $\text{Ker } P(u)$

$$\mu_1 : \text{Ker}(P(u)) \longrightarrow \text{Ker}(P(u))$$

$x \longmapsto x_1$ où $x_1 + x_2$ est la décomposition selon $\text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u)$

$$\mu_2 : \text{Ker}(P(u)) \longrightarrow \text{Ker}(P(u))$$

$$x \longmapsto x_2$$

$$\forall x \quad \mu_1(x) = P_2(u) \circ V_2(u)(x) \\ = (P_2 V_2)(u)(x)$$

$$\underline{\text{donc}} \quad \mu_1 \in \text{IK}[u]$$

$$\text{car } \mu_1 = (P_2 V_2)(u)$$

Corollaire. Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note $P = P_1 \dots P_r$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$$

Ring enser fréquente : il n'a pas de noyau de polynôme !!!

Corollaire. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$P = \lambda P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i^{m_i}(u))$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, les irréductibles sont les $(X-a)$ $a \in \mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}[X]$ ———— sont les $(X-a)$ $a \in \mathbb{R}$

ou les (x^2+px+q)

où $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$

2.2 Exemple d'utilisation

Exemple. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \quad (E)$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Montrer que si ϕ est solution de (E) , alors ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère $u : f \mapsto f'$ endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire l'ensemble S des solutions de (E) comme $\text{Ker}(P(u))$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme que l'on précisera.
3. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles.
4. En déduire la résolution de E par la résolution de deux équations différentielles d'ordre < 3 .

① Si ϕ sol de (E) , ϕ est 3 fois dérivable

$$\text{et } \phi^{(3)} + 4\phi'' + 4\phi' + 3\phi = 0$$

$$\text{donc } \phi^{(3)} = \underbrace{-4\phi'' - 4\phi' - 3\phi}_{\text{dérivable}}$$

donc ϕ est 4 fois dérivable.

per ric, ϕ est k fois dérivable $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\textcircled{2} \quad \phi \in S \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(3)}(x) + 4\phi''(x) + 4\phi'(x) + 3\phi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{u^3(\phi)(x)}_{\phi'''} + 4u^2(\phi)(x) + 4u(\phi)(x) + 3\phi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(u^3(\phi) + 4u^2(\phi) + 4u(\phi) + 3\phi \right)(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow u^3(\phi) + 4u^2(\phi) + 4u(\phi) + 3\phi = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \phi \in \text{Ker} \left(u^3 + 4u^2 + 4u + 3\text{Id}_E \right)$$

$$\text{Bref: } S = \text{Ker}(P(u))$$

$$\text{où } P = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$$

On calcule:

$$P = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$$

racines parmi les diviseurs de 3
1, -1, 3, -3

$$= \underbrace{(X+3)}_{P_1} \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{P_2}$$

$$P_1 \cap P_2 = 1 \quad \text{car } -3 \text{ n'est pas racine de } P_2$$

Puis, par le lemme de noyaux:

$$\begin{aligned} S &= \text{Ker}(P(u)) \\ &= \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) \end{aligned}$$

Recherche de $\text{Ker } P_1(u)$.

$$\phi \in \text{Ker } P_1(u) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \phi'(x) + 3\phi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi \text{ sol de l'eq diff } y' + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi \in \text{Vect}(x \mapsto e^{-3x})$$

$$\text{Ker } P_1(u) = \text{Vect}(x \mapsto e^{-3x})$$

Recherche de $\text{Ker } P_2(u)$

$$\phi \in \text{Ker } P_2(u) \Leftrightarrow \phi \text{ sol de } y'' + y' + y = 0$$

eq. diff linéaire, homogène, d'ordre 2, à coeff. constants

$$z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \bar{j})$$

$$\text{car } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Leftrightarrow \phi \in \text{Vect} \left(x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

Q: $S = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{-3x}, x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$
 par concaténation de bases.

3 Polynômes annulateurs et réduction

3.1 Une CNS de diagonalisabilité

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

(i) u est diagonalisable $\iff$ il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
 $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples
(ii)

Attention χ_u scindé simple $\Rightarrow$ u diagonalisable
 χ_u annulateur de u

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Preuve:

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose u diagonalisable.

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres

de multiplicités $m_1, \dots, m_p$

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u) \quad \text{car } u \text{ diag.}$$

$\uparrow$ de dim m_k

Donc, avec $\mathcal{B}$ base adaptée à cette somme directe

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \lambda_2 I_{m_2} & \\ (0) & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

Pozm $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$ scindé simple.

Montrons $P(u) = 0$

→ Soit $x \in E_{\lambda_k}(u)$

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= (u - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_r \text{Id})(x) \\ &= (u - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ \underbrace{(u - \lambda_k \text{Id})}_{=0}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $x = x_1 + \dots + x_r \in E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_r}(u)$

$$\begin{aligned} \text{on a } P(u)(x) &= \sum_{k=1}^r P(u)(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^r 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bref: $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit P scindé simple annule u ,

alors $\Pi_u \mid P$

donc Π_u scindé simple.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

On écrit $\Pi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$

les $X - \lambda_k$ sont premiers entre eux

donc par le lemme des noyaux

$$\begin{array}{c} \text{Ker } \Pi_n(u) = \bigoplus_{k=1}^n \underbrace{\text{Ker } (X - \lambda_k)(u)}_{E_{\lambda_k}(u)} \\ \parallel \\ \text{Ker } \mathcal{O}_{\chi(E)} \\ \parallel \\ E \end{array}$$

$$\text{donc } E = \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(u) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$$

donc u diagonalisable.

Proposition. On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

Exemple. Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

↳ $X(X-1)$ annulateur de p , scindé simple
donc p diagonalisable.

3.2 Sous-espaces stables

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est stable par u , et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Alors :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad \text{et} \quad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

π_u annulateur de u donc de u_F donc $\pi_{u_F} \mid \pi_u$

Preuve: Si u diagonalisable,

$$\exists P \text{ scindé simple} \quad \text{q} \quad P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\text{ie } \forall x \in E \quad P(u)(x) = 0$$

$$\text{donc en part } \forall x \in F \quad P(u)(x) = 0$$
$$P(u_F)(x)$$

donc P est annulateur de u_F

Comme il est scindé simple, u_F diagonalisable.

3.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \end{aligned}$$

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^q = I_n$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que A est diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est annulateur de A .

Corollaire.

- $\pi_A \mid \chi_A$
- $\deg(\pi_A) \leq n$

