

Bm me : 240.31

250.2

250.7

2027 MPI/MPI*

250

Polynômes d'endomorphisme, polynômes de matrice

Je me souviens

1. Que signifie $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
2. Citer trois exemples d'algèbres.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k entier, que désigne A^k ? A^0 ?
4. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et k entier, que désigne u^k ? u^0 ?
5. Qu'est-ce qu'un idéal de $\mathbb{K}[X]$?

ex et anneau où $\times$ et $\cdot$ sont compatibles.

Exemple :

- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est structure produit
- $(\mathbb{K}^n, +, \times)$ anneau structure produit
- $(\mathbb{K}^n, +, \times, \cdot)$ algèbre
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ algèbre
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ algèbre
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ algèbre

$$E \xrightarrow{u} E$$

$$P(u): E \longrightarrow E$$

1 Polynôme d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de l'endomorphisme u** :

$$P(u) = p_d u^d + \dots + p_1 u + p_0 \underbrace{\text{Id}_E}_{u^0}$$

Remarque. u^k désigne $\underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

par récurrence $\left\{ \begin{array}{l} u^0 = \text{Id}_E \\ u^{k+1} = u \circ u^k \end{array} \right.$

C'est un **endomorphisme de E** .

$P(u)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en u .

$$\begin{aligned} \tilde{P}: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \tilde{P}(t) \end{aligned}$$

On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u .

On dit qu'un endomorphisme v est un **polynôme de l'endomorphisme u** lorsque $v \in \mathbb{K}[u]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

$$v \in \mathbb{K}[u] \iff \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ s.t. } v = P(u)$$

Exemple. Avec $P = X^3 - 2X + 1$, $P(u) = u^3 - 2u + \text{Id}_E$, et donc $P(u)(x) = u^3(x) - 2u(x) + x$.

$$\begin{aligned} P(u): E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto (P(u))(x) = (u^3 - 2u + \text{Id})(x) \\ &= u(u(u(x))) - 2u(x) + x \end{aligned}$$

Rien $P(u)(x)$ par habitude.

~~$P(u(x))$~~ pas de produit de vecteurs.

$P(u)$ est un endomorphisme.

Définition. On dit que P est **annulateur de u** lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$\begin{array}{ccc} \phi_u : \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

- ϕ_u est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_u = \mathbb{K}[u]$
- $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Exemple. Comme $P = X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$, par le morphisme ϕ_u , on déduit $u^3 - 2u + \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E) \circ (u^2 + u - \text{Id}_E)$.

$$\begin{aligned} P(u) = \phi_u(P) &= \phi_u((X-1) \times (X^2+X-1)) \\ &= \phi_u(X-1) \circ \phi_u(X^2+X-1) \\ &= (u - \text{Id}_E) \circ (u^2 + u - \text{Id}_E) \end{aligned}$$

Preuve du théorème

- ϕ_u est bien à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$.

$$\text{Si } P = \sum_{k=0}^r a_k X^k$$

$$\phi_u(P) = \sum_{k=0}^r a_k u^k$$

$\in \mathcal{L}(E)$ comme CL d'endomorphismes.

- Linéarité

$$\text{Soit } P = \sum_{k=0}^p a_k X^k, \quad Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

On note $n = \max(p, q)$ et on considère les

Donnés par des zéros. $(a_{p+1} = \dots = a_n = 0$
 $b_{q+1} = \dots = b_n = 0)$

$$\begin{aligned}\phi_n(\lambda P + \mu Q) &= \left(\lambda \sum_{k=0}^n a_k X^k + \mu \sum_{k=0}^n b_k X^k \right) (n) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) X^k \right) (n) \quad \text{calcul dans } \mathbb{K}[X] \\ &= \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) u^k \quad \text{calcul dans } \mathcal{U}(E) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n a_k u^k + \mu \sum_{k=0}^n b_k u^k \\ &= \lambda \phi_n(P) + \mu \phi_n(Q)\end{aligned}$$

donc ϕ_n est linéaire.

• $\phi_n(1) = 1(n)$
 $= u^0$
 $= Id_E$ ← c'est X^0 , neutre de X dans $\mathbb{K}[X]$
neutre de 0 dans $\mathcal{U}(E)$

• Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Il y a $\phi_n(P \times Q) = \phi_n(P) \circ \phi_n(Q)$

* 1^{er} cas: $P = X^i$ et $Q = X^j$

$$\phi_n(X^i \times X^j) = \phi_n(X^{i+j}) \quad \text{calcul dans } \mathbb{K}[X]$$

$$= u^{i+j}$$

$$= u^i \circ u^j \quad \text{calcul dans } \mathcal{L}(E)$$

$$= \phi_u(X^i) \circ \phi_u(X^j)$$

* 2^e cas $P = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ et $Q = X^j$

$$\phi_u(P \times Q) = \phi_u\left(\sum_{k=0}^r a_k X^{k+j}\right) \quad \text{calcul dans } K[X]$$

$$= \sum_{k=0}^r \left(a_k \phi_u(X^{k+j}) \right) \quad \text{linéarité de } \phi_u$$

$$= \left(\sum_{k=0}^r \left(a_k \phi_u(X^k) \right) \right) \circ \phi_u(X^j) \quad \text{par le 1^{er} cas}$$

$$= \left(\phi_u\left(\sum_{k=0}^r a_k X^k\right) \right) \circ \phi_u(X^j)$$

calcul dans $\mathcal{L}(E)$

et linéarité de ϕ_u

$$= \phi_u(P) \circ \phi_u(X^j)$$

3^e cas P qcq et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$

$$\phi_u(P \times Q) = \phi_u\left(P \times \sum_{k=0}^q b_k X^k\right)$$

$$= \phi_u \left(\sum_{k=0}^q b_k P x X^k \right)$$

calcul dans $\mathbb{K}[X]$

$$= \sum_{k=0}^q b_k \phi_u(P x X^k)$$

linéarité de ϕ_u

$$= \sum_{k=0}^q b_k \phi_u(P) \circ \phi_u(X^k)$$

par le 2^e cas

$$= \phi_u(P) \circ \left(\sum_{k=0}^q b_k \phi_u(X^k) \right)$$

calcul dans $\mathcal{L}(E)$

$$= \phi_u(P) \circ \phi_u \left(\sum_{k=0}^q b_k X^k \right)$$

linéarité de ϕ_u

$$= \phi_u(P) \circ \phi_u(Q)$$

Ainsi ϕ_u morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$

- $\text{Im } \phi_u = \mathbb{K}[u]$

ben oui, c'est la def $\mathbb{K}[u]$

$$\tilde{\phi}_u : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[u] \quad \text{surjective}$$

$$P \longmapsto P(u)$$

- $\text{Ker } \phi_n$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$
en tant que noyau de morphisme d'anneaux.

Proposition.

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[u] &= \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((u^n)_{n \in \mathbb{N}})\end{aligned}$$

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Rappel:

Une C.L. d'une famille infinie est une CL
d'une sous-famille finie.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on note $B = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$

→ B est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$

Bien oui! Tout polynôme est CL d'une
sous-famille finie de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

→ B est libre (ie toute ses sous-familles
finies sont libres car échelonnées en
degré)

$$\mathbb{K}[X] = \text{Vect}_{n \in \mathbb{N}} (X^n)$$

$$\text{donc } \mathbb{K}[u] = \text{Im } \phi_n$$

$$= \text{Vect}_{m \in \mathbb{N}} (\phi_m(x^m))$$

$$= \text{Vect} (u^0, u^1, u^2, \dots, u^n, \dots)$$

$\uparrow$ son-er de $\mathcal{L}(E)$

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$$

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$P(u)$ et $Q(u)$ commutent

$$1(u) = \text{Id}_E$$

dans $\mathcal{L}(E)$ où $\circ$ n'est pas commutatif.

" $\mathbb{K}[u]$ est commutative"

$$P(u) \circ Q(u) = \phi_u(P) \circ \phi_u(Q)$$

$$= (PQ)(u)$$

$$= (QP)(u) \quad \text{car } \mathbb{K}[X] \text{ commutative}$$

$$= Q(u) \circ P(u)$$

1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le morphisme :

$$\begin{aligned} \phi_u : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de u** . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u et appelé **polynôme minimal de u** , tel que :

$$\begin{aligned} \text{Ker } \phi_u = (\pi_u) &= \{\pi_u Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \pi_u \cdot \mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_u pour le polynôme minimal de u .

Remarque. Si E n'est pas de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u peut avoir un polynôme minimal, ou pas.

Preuve: $n = \dim E$.

• $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ est une famille à $n^2 + 1$ éléments dans $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension n^2 donc cette famille est liée.

donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$$\text{tg } a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_{n^2} u^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\text{On pose } P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$$

$$\begin{aligned} \text{On a } P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \phi_u(P) &= P(u) \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

donc $P \in \text{Ker } \phi_u$.

$\text{Ker } \phi_u$ idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ donc $\exists \pi_u \neq 0$

tg $\text{Ker } \phi_u = \pi_u \cdot \mathbb{K}[X]$. On peut choisir π_u unitaire (quitte à diviser par le coeff. dominant)

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie :

$$Q(u) = 0 \iff \pi_u \mid Q$$

π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u .

Q annulateur de $u \iff \pi_u \mid Q$

Preuve: $Q(u) = 0 \iff \phi_u(Q) = 0$

$$\implies Q \in \text{Ker } \phi_u$$

$$\iff Q \in \pi_u \cdot \mathbb{K}[x].$$

Remarque: unicité de π_u

Si Q est un autre polynôme unitaire tq

$$\text{Ker } \phi_u = Q \cdot \mathbb{K}[x],$$

alors $Q \mid \pi_u$ et $\pi_u \mid Q$

donc π_u et Q associés, unitaires, donc égaux.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie λId_E .

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, i.e. un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

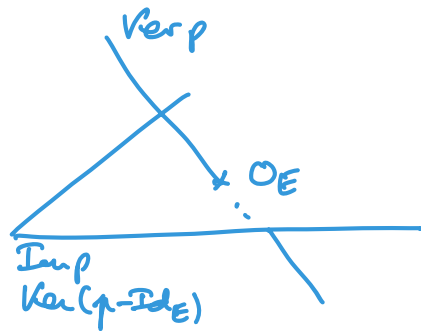
Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie, i.e. un endomorphisme s tel que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Exemple. On considère $D : P \mapsto P'$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que D n'admet pas de polynôme minimal.

p un projecteur

i.e. $p \circ p = p$

i.e. $X^2 - X$ est annulateur de p
" $X(X-1)$



donc $\Pi_p = X$ ou $(X-1)$ ou $X(X-1)$

car $\Pi_p \mid X(X-1)$

1^{er} cas $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est un projecteur dégénéré)

on a $\Pi_p = X$ car $X(p) = p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

2^e cas $p = \text{Id}_E$ (c'est un projecteur dégénéré)

on a $\Pi_p = X-1$ car $(X-1)(p) = p - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

3^e cas Sinon.

X n'est pas annulateur de p car $p \neq 0$

$X-1$ ————— car $p \neq \text{Id}_E$

donc $\Pi_p = X(X-1)$

$$D: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$$P \longmapsto P'$$

Par l'absurde

Soit $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ annulateur de D , avec $Q \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{ie } 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])} &= Q(D) \\ &= \sum_{k=0}^q a_k D^k \end{aligned}$$

$$\text{ie } \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad 0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^q a_k P^{(k)}$$

$D^k(P)$
 $\downarrow$
 $P^{(k)}$

en part avec $P = X^q$:

$$\sum_{k=0}^q a_k \underbrace{q(q-1)\dots(q-k+1)}_{\frac{q!}{(q-k)!}} X^{q-k} = 0$$

$q X^{q-1}$
 $q(q-1) X^{q-2}$

donc $\forall k \in [0, q], \quad a_k = 0$ par liberté $X^0, \dots, X^q$

donc $Q = 0 \rightarrow$ pas de pol. minimal.

1.4 Base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal π_u , et on note $d = \deg(\pi_u)$. Alors $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Remarque.

- Dans le cas du théorème, $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
- $\phi_u : P \mapsto P(u)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$.
- Si u n'admet pas de polynôme minimal, c'est-à-dire lorsque ϕ_u est injective, ϕ_u est un isomorphisme d'algèbres entre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$.

Preuve :

$\mathbb{K}[u] \cong \mathbb{K}[X]$

$\nwarrow$ sous-esp. (sous-algèbre) de $\mathcal{L}(E)$
 $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}_{n \in \mathbb{N}} (u^n)$
 $= \text{Vect} (\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^n, \dots)$
 $= \text{Vect} (\underbrace{\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{d-1}}_{\text{libre}})$

- Montrer $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ libre

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K}$ tq

$$a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_{d-1} u^{d-1} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$$

ie $P(u) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$

où $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1}$

Donc $P = \mathcal{O}_{\mathbb{K}[X]}$ par minimalité de d le degré de π_u .

donc $a_0 = a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$

Bref $(\text{Id}_E, \dots, u^{d-1})$ libre

• Montrer $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$

[$\supset$]

[$\subset$] Soit $v \in \mathbb{K}[u]$

ie $\exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ s.t. } v = P(u)$
 C-à-d $\sum u^k$

On effectue la div. euclidienne de P par Π_u :

$$\begin{cases} P = \Pi_u \cdot Q + R \\ R=0 \text{ ou } \deg R < d \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{aligned} v &= (Q \cdot \Pi_u + R)(u) \\ &= Q(u) \circ \underbrace{\Pi_u(u)}_{0_{\mathbb{K}(E)}} + R(u) \end{aligned}$$

} règle de calcul dans $\mathbb{K}(u)$

$$= R(u) \text{ ou } R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

$$\in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$$

Remarque:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\sim}_{\phi_u}: & \mathbb{K}_{d-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}[u] \\ & \cancel{\mathbb{K}[X]} & \cancel{\mathbb{K}(E)} \\ & P & \longmapsto P(u) \end{array}$$

isomorphisme

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot) \quad A^3 = A \times A \times A$$

2 Polynôme d'une matrice

2.1 Définition

Définition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de la matrice A** :

$$P(A) = p_d A^d + \cdots + p_1 A + p_0 I_n$$

C'est une matrice carrée.

On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes de la matrice A .

On dit qu'une matrice B est un **polynôme de la matrice A** lorsque $B \in \mathbb{K}[A]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Remarque. A^k désigne $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

$P(A)$ n'est pas la fonction polynomiale associée à P évaluée en A .

$\mathbb{K}[A]$ est l'ensemble des pol. de la matrice A

est l'ensemble des CL des puissances de A

2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

- ϕ_A est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_A = \mathbb{K}[A]$
- $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Proposition.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[A] &= \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((A^n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

$\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$$

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

$P(A)$ et $Q(A)$ commutent

$$1(A) = I_n$$

Si A est triangulaire, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont connus :

$$\text{Lorsque } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Preuve:

• Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * \\ (0) & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$* \quad A^0 = I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & * \\ (0) & \lambda_n^0 \end{pmatrix}$$

* On suppose $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * \\ (0) & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Alors $A^{k+1} = A^k A$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * \\ (0) & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ par H.R.}$$

$$= \left(\lambda_1 C_1 \mid *C_1 + \lambda_2 C_2 \mid *C_1 + *C_2 + \lambda_3 C_3 \mid \dots \right)$$

où C_i sont les colonnes de A^k

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & * & * \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n^{k+1} \end{pmatrix}$$

Soit alors $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

on a $P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * \\ (0) & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^2 & * \\ \hline (0) & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} P(\lambda_n) & * \\ \hline (0) & P(\lambda_m) \end{array} \right)$$

2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le morphisme :

$$\begin{aligned}\phi_A : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto P(A)\end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de A** . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_A et appelé **polynôme minimal de A** , tel que :

$$\begin{aligned}\text{Ker } \phi_A &= (\pi_A) = \{\pi_A Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \pi_A \cdot \mathbb{K}[X]\end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_A pour le polynôme minimal de A .

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Q(A) = 0 \iff \pi_A \mid Q$$

π_A est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A .

Ah tiens !

Imaginons A diagonalisable.

$$\text{ie } \exists S \in GL_n(\mathbb{K})$$

$$\exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = S D S^{-1}$$

$$\text{Pour } P \in \mathbb{K}[X], \quad P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k (S D S^{-1})^k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k S D^k S^{-1}$$

$$= S \left(\sum_{k=0}^n a_k D^k \right) S^{-1}$$

$$= S P(D) S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & (0) \\ (0) & P(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}$$

en particulier avec $P = \chi_A$

↑ racines sont $\lambda_1 \dots \lambda_n$

on a

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= S \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si A diagonalisable, χ_A est annulateur de A .

(En fait, c'est vrai sans l'hypothèse de diagonalisabilité)

Exemple. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal, et on note $d = \deg(\pi_A)$. Alors $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Remarque.

- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$.
- $\phi_A : P \mapsto P(A)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[A], +, \cdot)$.

$\mathbb{K}_{d-1}[X]$

240.13

 73

Rmq

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(\mathbb{I}_2, A)$.

$$\chi_A = (X-3)(X+2)$$

A diagonalisable

$$\chi_A(A) = 0$$

$$\text{donc } \pi_A \mid (X-3)(X+2)$$

$$\text{donc } \pi_A = (X-3) \text{ ou } \pi_A = (X+2)$$

$$\text{ou } \pi_A = (X-3)(X+2)$$

$$\text{or } A \neq 3\mathbb{I}_2 \text{ et } A \neq -2\mathbb{I}_2$$

donc $X-3$ et $X+2$ ne sont pas annulateurs de A

$$\text{donc } \pi_A = (X-3)(X+2) \quad \underline{d=2}$$

$$\text{donc } \mathbb{K}[A] = \text{Vect}(\mathbb{I}_2, A)$$

On aurait noté $C(A) = \{ \pi \mid A\pi = \pi A \}$

On sait que $K[A] \subset C(A)$

$\uparrow$
de dim 2

$\uparrow$
on a montré de dim 2

Propose à $D_2(K)$

3 Lien entre les deux notions

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \text{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P(\text{Mat}(u, \mathcal{B}))$$

