

Pour jé: 240.4, 240.5, 240.6

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_c = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad \text{ne pas se tromper dans les signes}$$

$$= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{X-1} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{X-3} \end{vmatrix} \quad \text{div } C_1$$

$$= (X-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (X^2 - 4X + 4)$$

$$= (X-2)^3$$

$$Sp(C) = \{ 2 \}$$

↑ racine triple de χ_c

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_F = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{n_1} = X^3 - 1$$

$$\textcircled{n_2} \chi_F = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

determinant circulant

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

div C_1

$$= (X-1)(X^2 + X + 1)$$

irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

↳ dans $\mathbb{C}[X]$ $(X-j)(X-j^2)$

$$S_{p_{\mathbb{R}}}(F) = \{1\}$$

$$S_{p_{\mathbb{C}}}(F) = \{1, j, j^2\}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Alors χ_{u_F} divise χ_u .

$$u: E \longrightarrow E$$

F sous-espace de E stable par u

$$u_F: F \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto u(x)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F

$$\text{i.e. } \mathcal{B} = (\underbrace{\mathcal{B}_1, \dots}_{\text{base de } F})$$

$$A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

par stabilité de F par u

$$\text{où } A_1 = \text{Mat}(u_F, \mathcal{B}_1)$$

On calcule $\chi_u(X) = \det(XI_n - A)$ où $p = \dim F$

$$= \begin{vmatrix} XI_p - A_1 & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix}$$

triangulation par blocs

$$= \det(XI_p - A_n) \times \det(XI_{n-p} - C)$$

$$= \chi_{u_F}(X) \times P(X)$$

Ans: $\chi_{u_F} \mid \chi_u$

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ , alors :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

Preuve: Soit λ une vp de u , de multiplicité $m(\lambda)$

- par déf de v.p, $u - \lambda \text{Id}_E$ non injective

$$\text{donc } \dim \underbrace{\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)}_{E_\lambda(u)} \geq 1$$

- $E_\lambda(u)$ est un sous-es de E

de dim : $\dim E_\lambda(u)$, notée d

stable par u (c'est $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$)

Par le lemme,

$$\chi_{u|_{E_\lambda(u)}} \mid \chi_u$$



$$u|_{E_\lambda(u)} : E_\lambda(u) \longrightarrow E_\lambda(u)$$

$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$

$$x \mapsto u(x) = \lambda x$$

$$\text{Mat}(u|_{E_\lambda(u)}, B_\lambda) = \lambda I_d$$

$$\chi_{u|_{E_\lambda(u)}} = (X - \lambda)^d$$

λ est racine de χ_u , de mult $m(\lambda)$

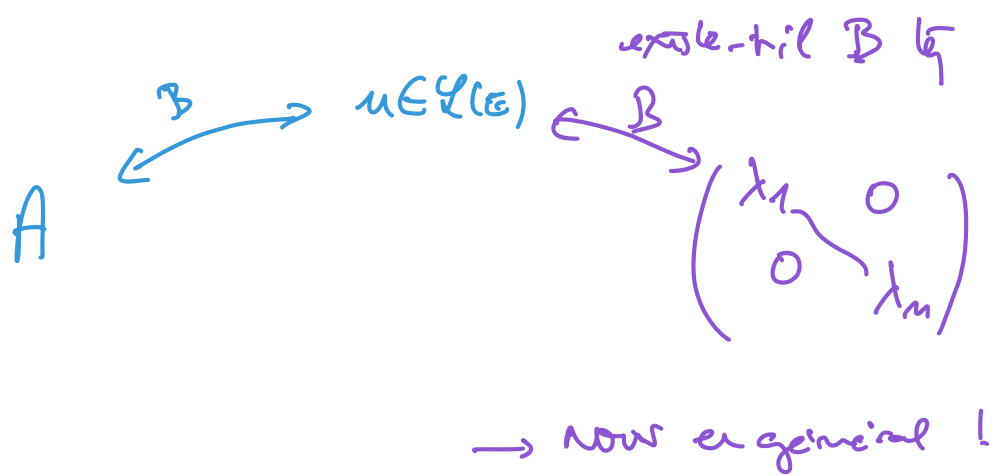
$$\text{donc } \chi_u = (X - \lambda)^{m(\lambda)} Q(X)$$

donc λ n'est pas racine

Bref: $(X - \lambda)^d \mid (X - \lambda)^{m(\lambda)} Q$

$$\text{donc } d \leq m(\lambda)$$

$$\text{ie } \underline{\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)}$$



5 Diagonalisabilité

5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit diagonale.

Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

$$\exists ? \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{?}$$

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \overset{u(e_1)}{\lambda_1} & \dots & \overset{u(e_n)}{\lambda_n} \\ & (0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

signifie $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des sous-espaces propres de u :

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u) = E \\ &\iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u)) = n \end{aligned}$$

Preuve. • On sait déjà que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$ est $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$.

$\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

• $\boxed{\Leftarrow}$ Si $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$

On note $\mathcal{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}(u)$ $\forall k$
En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$, on obtient
une base $\mathcal{B}$ de E et

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & (0) \\ & \lambda_2 I_{d_2} & \\ (0) & & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$$

I_n où $n=d_1$

qui est diagonale. ($d_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$)

$\Rightarrow$ On suppose u diagonalisable.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de u

On note $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u

que l'on ordonne selon $\lambda_1 \dots \lambda_p$, de sorte que

$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \lambda_2 I_{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_1}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E)$$

$$\frac{1}{2} \text{Ker} \begin{pmatrix} 0_{d_1} & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_1) I_{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & (\lambda_p - \lambda_1) I_{d_p} \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{d_1}$$

$= \text{Vect}(e_1, \dots, e_{d_1})$ d_1 premiers vecteurs de la base B .

de même $E_{\lambda_2}(u) = \text{Vect}(e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2})$

etc...

Enf $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$ par caractérisation de base.

Remarque 12 On veut montrer: $E \subset \sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$

$$\text{car } E = \text{Vect} \left(\underbrace{e_1, \dots, e_{d_1}}_{\in E_{\lambda_1}(\mu)}, \underbrace{e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2}}_{\in E_{\lambda_2}(\mu)}, \dots \right)$$

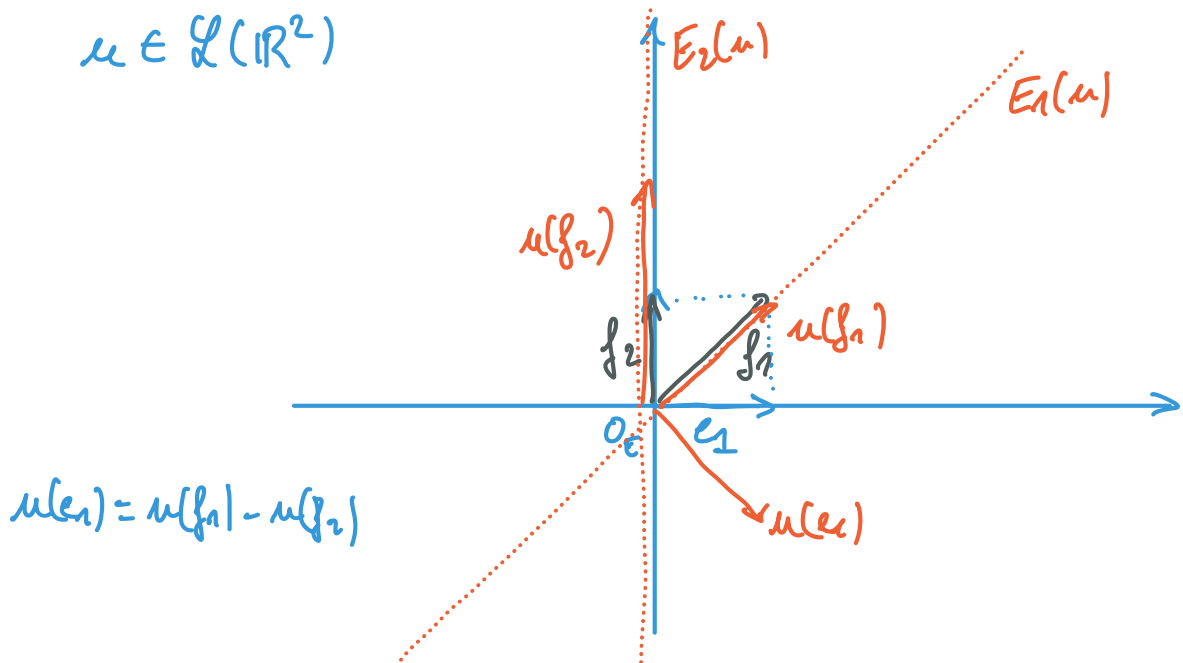
$$\subset E_{\lambda_1}(\mu) + E_{\lambda_2}(\mu) + \dots$$

$$\bullet \quad E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(\mu) \Leftrightarrow \dim E = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(\mu)$$

car la somme est directe.

Interlude

$$\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$



$$\mu(e_1) = \mu(f_1) - \mu(f_2)$$

Imaginaire μ diagonalisable, $B = (f_1, f_2)$

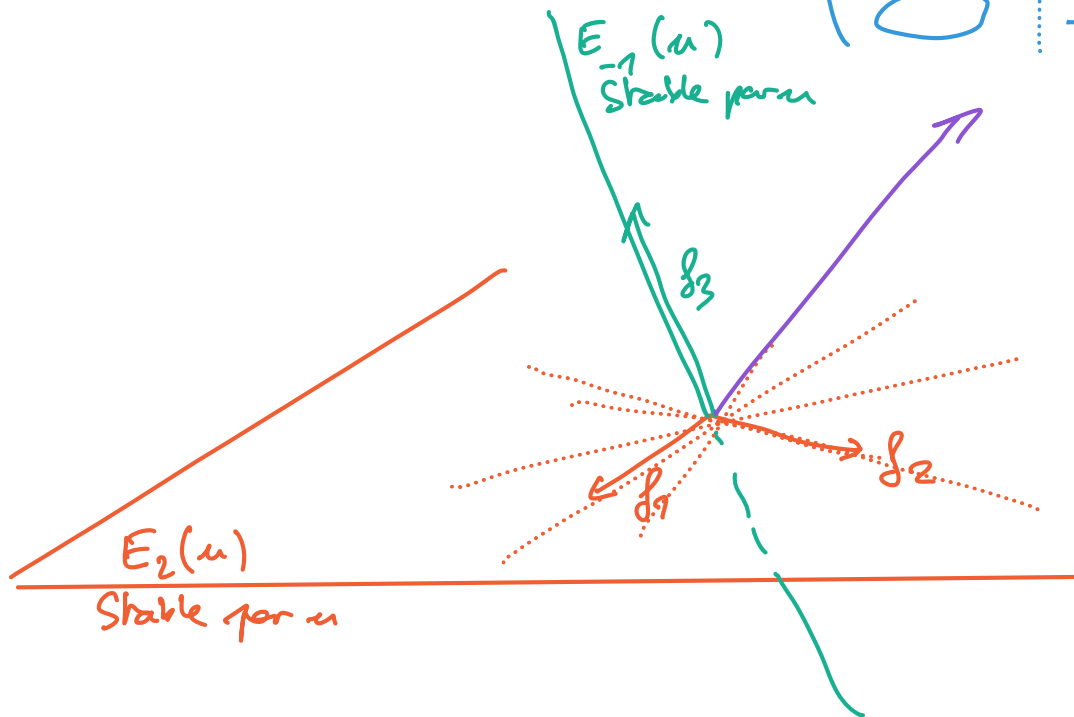
$$f_1 = (1, 1) \text{ et } f_2 = (0, 1)$$

$$f_1 \in E_1(\mu) \quad f_2 \in E_2(\mu)$$

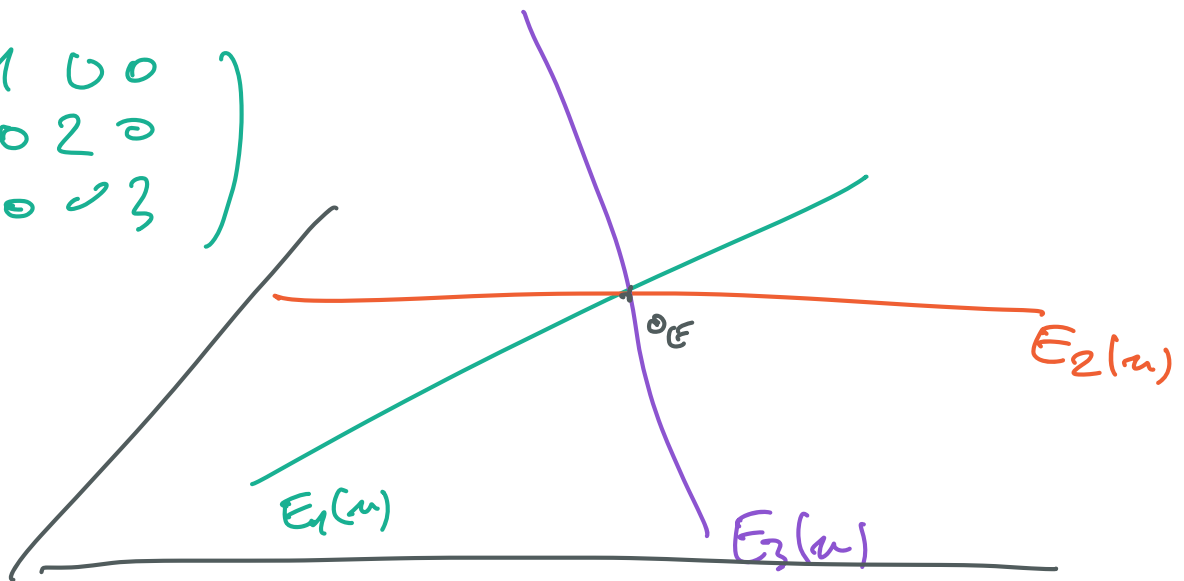
$$\text{Mat}(\mu, (f_1, f_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mu(f_1) \\ \mu(f_2) \end{matrix}$$

$$u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^3)$$

$$\exists \mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3) \text{ s.t. } \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ \hline \bigcirc & & | & -1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 2 & & & (0) \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

$3I_2$
 $\text{Mat}(u|_{E_3(u)})$

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si

- χ_u est scindé
- chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée

$$\dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u)$$

Remarque. Ça signifie que l'on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts}$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \dim(E_{\lambda_i}(u)) = m_i$$

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espace propres sont des droites vectorielles.

Remarque. C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.

Preuve. u diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(u)$

or $\dim E = \deg \chi_u$ où $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$
 $= \sum_{k=1}^p m_k$ ébauche scindi

et aussi $\forall k \quad 1 \leq \dim E_{\lambda_k}(u) \leq m_k$

Formules

$(\Leftarrow)$ On suppose χ_u est scindi et $\forall k \dim E_{\lambda_k} = m_k$

donc $\dim E = \deg \chi_u$

$$= \sum_{k=1}^p m_k$$

$$= \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}$$

donc u diagonalisable

$\Rightarrow$ par contrapose.

On suppose χ_u non scindé ou $\left\{ \begin{array}{l} \chi_u \text{ scindé} \\ \exists k \text{ tq } \dim E_k < m_k \end{array} \right.$

- Si χ_u non scindé

$$\begin{aligned} \dim E &= \deg \chi_u \\ &> \sum_{k=1}^p m_k \quad (\text{non scindé}) \\ &\geq \sum_{k=1}^p \dim E_k(u) \end{aligned}$$

donc u non diagonalisable.

- Si χ_u est scindé, et $\dim E_{\lambda_1} < m_1$

$$\begin{aligned} \dim E &= \deg \chi_u \\ &= \sum_{k=1}^p m_k \\ &= m_1 + \sum_{k=2}^p m_k \\ &> \dim E_{\lambda_1}(u) + \sum_{k=2}^p \dim E_k(u) \end{aligned}$$

donc u non diagonalisable.

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarque. C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.

CS Si χ_u est scindé simple, alors u diagonalisable
il scindé à racines simples.

5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale}, \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), A = PDP^{-1}$$

Remarque. Les coefficients de D sont les valeurs propres de A , avec multiplicité.

On désire

idée 1. $A \xleftarrow{B} e_n \xleftarrow{E} D$

$$P = \text{Pan}(B \rightarrow E) = \text{Mat}_B(E)$$

$$D = \text{Mat}(e_n, E) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donc E est un bon de vecteurs propres de e_n .

$$P = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$$B = (e_1 \dots e_n) \\ E = (e_1 \dots e_n)$$

idée 2 : $A = PDP^{-1}$

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array} \right) \\ \text{par blocs colonne}$$

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 C_1 & \dots & \lambda_n C_n \end{pmatrix}$$

bas, car $A = PDP^{-1}$, c'est car $\left\{ \begin{array}{l} AC_1 = \lambda_1 C_1 \\ \vdots \\ AC_n = \lambda_n C_n \end{array} \right.$

C'est-à-dire: on cherche $C_1, \dots, C_n$

base de vecteurs propres de A .

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent matriciellement :

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_{\lambda}(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_{\lambda}(A)) = n \\ &\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(A), \dim(E_{\lambda}(A)) = m(\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \implies A \text{ diagonalisable}$$

Enfin, si $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff u \text{ diagonalisable}$$

Remarque. Diagonaliser A , c'est trouver une matrice de passage P et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
Sauf si c'est demandé, on ne calcule pas P^{-1} .

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^T \text{ diagonalisable}$$

Démonstration:

$$\chi_{A^T} = \chi_A \quad \text{Sp}(A^T) = \text{Sp}(A)$$
$$\dim E_\lambda(A^T) = \dim E_\lambda(A)$$

$$A \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_A \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad \dim E_\lambda(A) = m(\lambda) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \chi_{A^T} \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(A^T) \quad \dim E_\lambda(A^T) = m(\lambda) \end{cases}$$

$$\implies A^T \text{ diagonalisable}$$

Remarque: les vecteurs propres de A^T n'ont pas grand chose à voir avec ceux de A .

5.3 Le théorème spectral

On démontrera et on complètera plus tard le résultat suivant :

Proposition. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

Rmq. En particulier, on sait alors
que $\dim E_\lambda(A) = m(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$

5.4 Des exemples

Exemple. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice pleine de 1.

$$\begin{aligned} \chi_J(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & & & \\ & X-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ & X-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & X-1 & \\ 1 & -1 & & -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-n) X^{n-1} \end{aligned}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$\vdots$

$C_n \leftarrow C_n + C_1$

(triangulaire inférieure)

$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ est vp simple} \\ 0 \text{ est vp de multiplicité } (n-1) \end{array} \right.$

- $1 \leq \dim E_n(J) \leq 1$

Oh! $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n(J)$ (matrice circulante)

donc $E_n(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 + \dots + C_n$

- $E_0(J) = \text{Ker } J$

$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

de rang 1

$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_3 = 0 \\ \vdots \\ C_1 - C_n = 0 \end{cases}$

de dim $n-1$ (per le th du rang)

de plus $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(J)$

$n-1$ vecteurs, échelonnés

$$\text{donc } E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Exemple. Diagonaliser $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

Si $\beta \neq 0$

$$\chi_J = \det(XI_n - J)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} = \beta J + (\alpha - \beta)I_n$$

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_n - \beta J - (\alpha - \beta)I_n) \\ &= \det((X - \alpha + \beta)I_n - \beta J) \\ &= \beta^n \det\left(\frac{X - \alpha + \beta}{\beta} I_n - J\right) \\ &= \beta^n \chi_J\left(\frac{X - \alpha + \beta}{\beta}\right) \end{aligned}$$

or $S_p(J) = \{0, n\}$

$$\chi_A(t) = 0 \Leftrightarrow \chi_J\left(\frac{t - \alpha + \beta}{\beta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t - \alpha + \beta}{\beta} = 0 \text{ ou } n$$

mult $n-1$

$$\Leftrightarrow t = \alpha - \beta \text{ ou } t = \alpha + (n-1)\beta$$

mult $n-1$

Espaces propres ...

Exemple. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\text{Ker } B$ et une base de $\text{Im } B$. Puis montrer que B est diagonalisable.

(B est symétrique réelle, donc diagonalisable)

- $\text{rg } B = 2$ car $C_1 = C_2$
 $\vdots$
 $C_1 = C_{n-1}$
 et C_1, C_n non colinéaires

$$\dim \text{Ker } B = n - 2$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans $\text{Ker } B$, échelonnés

$$\text{donc } \text{Ker } B = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } B &= \text{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) \\ &= \text{Vect}(C_1, C_n) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

