

Déterminants

5 Annexes

5.1 Annexe : applications n -linéaires alternées

Définition.

- Une application

$$\begin{aligned} f : E^n &\rightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est dite **n -linéaire** lorsque, pour tout i , tout $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, l'application :

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire.

On parle de **forme n -linéaire** lorsque $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$.

- Elle est dite **alternée** si on a l'implication :

$$\exists i \neq j \text{ t.q. } x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- Elle est dite **antisymétrique** si :

$$\begin{aligned} \forall i \neq j, f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots) \\ = -f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition. f est antisymétrique si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition.

- Si f est alternée, alors f est antisymétrique.
- Si f est antisymétrique et que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors f est alternée.

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .
L'espace des formes n -linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

$\mathfrak{S}_n$ = groupe de permutations, de card $n!$

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

← car $2 \neq 0$

~~$ELA(E)$~~

$\wedge(E)$

E

$$\wedge(E) \subset \mathbb{K}^{(E^n)}$$

Plus précisément.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n -linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. L'unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que :

$$\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

est appelée **déterminant dans la base $\mathcal{B}$** , et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Proposition. Soit ϕ une forme n -linéaire alternée sur un espace un espace vectoriel de dimension n , et on suppose que ϕ n'est pas nulle. Alors, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E :

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}$$

Remarque. La propriété généralise le résultat annoncé pour le déterminant dans une base $\mathcal{B}$.

Preuve.

$\Leftarrow$ On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ liée, donc l'un des vecteur est CL des autres :

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i x_i$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &= \phi\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i x_i, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad \text{par } n\text{-linéarité} \\ &= 0 \text{ car } \phi \text{ alternée} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ libre, donc c'est une base de E , notée $\mathcal{B}$. Comme ϕ est une forme n -linéaire alternée non nul, il existe λ non nul tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Et donc $\phi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda \neq 0$.

□

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base donnée.

$$\Lambda(E) = \text{Vect}(\varphi)$$

↑
1 forme n -linéaire alternée
 $\neq 0$

$$\phi \in \Lambda(E)$$

$$\rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \text{ s.t. } \phi = \alpha \varphi$$

$$\text{i.e. } \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \alpha \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{On choisit } \phi \text{ où } \alpha = \frac{1}{\varphi(e_1, \dots, e_n)}$$

$$\text{Ça fournit } \phi \in \Lambda(E) \text{ s.t.}$$

$$\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

$$\text{On note } \underline{\phi = \det_{\mathcal{B}}}$$

5.2 Annexe de l'annexe : démonstration du théorème de structure

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n -linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve pour $n = 2$. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ dans E , et ϕ une forme 2-linéaire alternée sur E . On calcule :

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1\phi(e_1, e_1) + x_1y_2\phi(e_1, e_2) \\ &\quad + x_2y_1\phi(e_2, e_1) + x_2y_2\phi(e_2, e_2) \text{ par 2-linéarité} \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\phi(e_1, e_2) \text{ car alterné et antisymétrique}\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$, et la seule forme 2-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, e_2) = 1$ est $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$. $\square$

Preuve pour n quelconque. Soit E espace de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , ϕ une forme n -linéaire alternée sur E . Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire que, pour tout j ,

$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &\quad \text{en posant } \sigma(k) = i_k \\ &= \sum_{\substack{\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ \sigma \text{ bijective}}} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &\quad \text{car } \phi \text{ est alternée} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \phi(e_1, \dots, e_n) \\ &\quad \text{car } \phi \text{ est antisymétrique} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \phi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$, et la seule forme n -linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$\square$

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \phi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

nul dès que $\exists k \ell$
 $i_k = i_\ell$

$$= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_k \text{ 2 à 2 distincts}}} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$\varepsilon(\sigma) \phi(e_1, \dots, e_n)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \phi(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \phi(e_1, \dots, e_n)$$

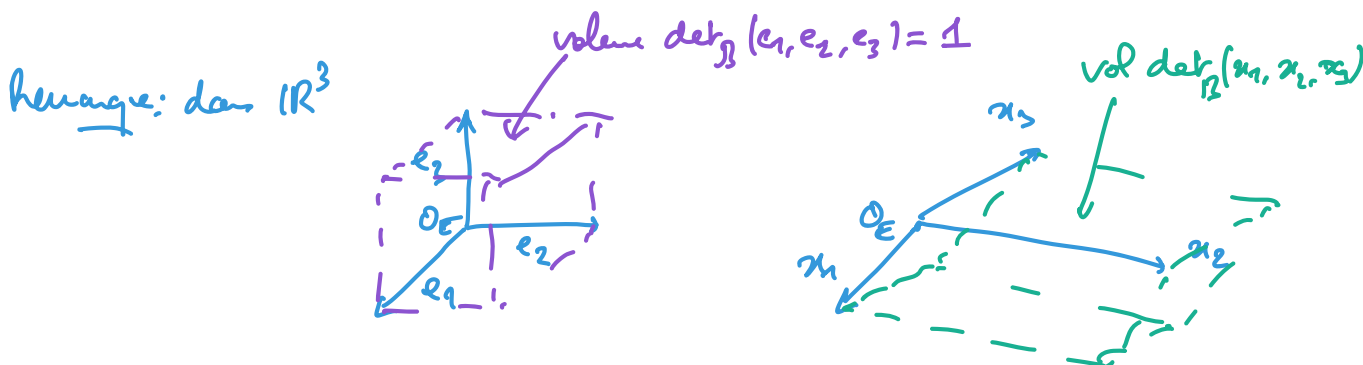
1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E . Elle est aussi antisymétrique.



1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .
Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve: $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ $\in \Lambda(E) = \text{Vect}(\det_{\mathcal{B}'})$

donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tq $\det_{\mathcal{B}} = \alpha \det_{\mathcal{B}'}$

i.e $\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = \alpha \det_{\mathcal{B}'}(x_1 \dots x_n)$

en part par $(x_1 \dots x_n) = \mathcal{B}'$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \alpha \cdot 1$$

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E$$

2 Déterminant d'un endomorphisme

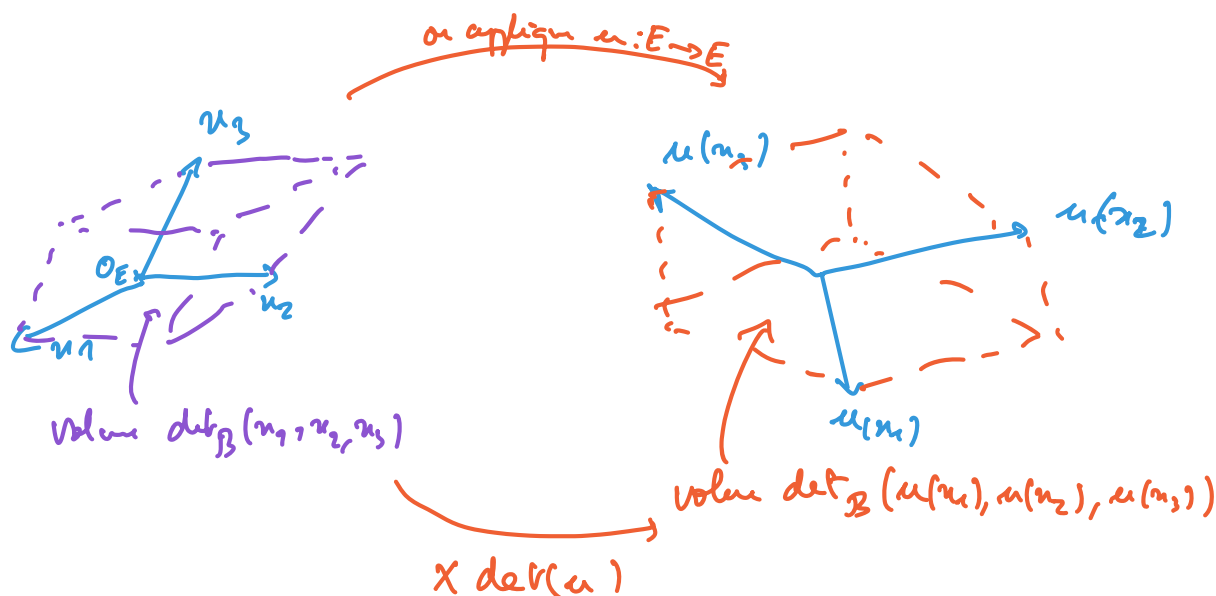
Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

son entendu:
 $\begin{cases} \text{indép de } \mathcal{B} \\ \text{indép de } x_1 \dots x_n \end{cases}$



$$\det(u) = 0 \iff \text{no injectivité de } u.$$

Preuve:

$$\bullet (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(u_1) \dots u(u_n))$$

est une forme n -linéaire (par linéarité de u)

alternée (car $\det_{\mathcal{B}}$ l'est)

$$\text{donc } \exists \alpha \in \mathbb{K} \text{ (noté } \det_{\mathcal{B}}(u)) \quad \forall$$

$$\phi = \alpha \det_{\mathcal{B}}$$

$$\text{i.e. } \forall (u_1 \dots u_n) \in E^n$$

$$\det_{\mathcal{B}}(u(u_1) \dots u(u_n)) = \det_{\mathcal{B}}(u) \det_{\mathcal{B}}(u_1 \dots u_n)$$

- en part

$$\det_{\mathcal{B}}(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1) \dots u(e_n))$$

- Soit $\mathcal{B}'$ une autre base.

$$\text{Rq: } \det_{\mathcal{B}}(u) = \det_{\mathcal{B}'}(u)$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(u) &= \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u(e'_1) \dots u(e'_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \text{inverse} \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

5.3 Annexe : indépendance du choix de la base pour le calcul de $\det(u)$

Construction. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{B}$ de E . L'application :

$$\phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

est une forme n -linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Ce λ est unique, on l'appelle **le déterminant de u** et on le note $\det(u)$.

Remarque. On retient : Pour toute base $\mathcal{B}$ et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on calcule :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ &\quad \text{par changement de base} \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad \text{par changement de base} \end{aligned}$$

C'est donc bien le même coefficient λ pour la base $\mathcal{B}'$. $\square$

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
- $u \in GL(E) \iff \det(u) \neq 0 \text{ et } \det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

$$\begin{aligned} \det(u \circ v) &= \det_{\mathcal{B}}(u \circ v(e_1), \dots, u \circ v(e_n)) && \text{d'après le lemme} \\ &= \det(u) \det_{\mathcal{B}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) && \text{d'après le lemme} \\ &= \det(u) \det(v) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(u) \det(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \in GL(E) &\iff (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ base de } E \\ &\iff \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))}_{\det(u)} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(u \circ u^{-1}) &= \det(u) \det(u^{-1}) \\ &\overset{''}{=} \det(\text{Id}_E) \\ &\overset{''}{=} \det_{\mathcal{B}}(\text{Id}(e_1), \dots, \text{Id}(e_n)) \\ &\overset{''}{=} 1 \end{aligned}$$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A .

Remarque. C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \dots, C_n)$.

Si $\mathcal{B}$ base de E , $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$

$$A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$$

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1) \dots u(e_n))$$

$$\text{ou } A = \begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

cf §1

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Remarque: $\det(A)$ n'est pas linéaire

→ le déterminant d'une matrice est n-linéaire alterné
par rapport aux colonnes de la matrice

$$\det(C_1 | C_2 | \dots | C_n)$$

Bien oui! $A = \text{Mat}_{\text{can}}(C_1, \dots, C_n)$
dans $M_n(\mathbb{K})$

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0 \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

) factoriser par λ
dans chaque colonne

$$= \lambda^n \det(A)$$

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}}_{\substack{a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} \text{ "commut"}}}$$

$\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ est une bijection
 $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ donc c'est un changement d'ordre

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

↑
 $\varepsilon(\sigma)^{-1}$ car ε morphisme de groupes
" "
 $\varepsilon(\sigma)$ car $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$

$$= \det(A)$$

$$A \longleftrightarrow n \longleftrightarrow B$$

$$\exists P \in GL_n(K) \text{ s.t. } A = P B P^{-1}$$

$$\det(A) = \det(P B P^{-1})$$

$$= \det(P) \det(B) \frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(B)$$

4 Calcul de déterminants

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n . Pour tout i, j , on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij} .

On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Théorème.

Le développement par rapport à la j -ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i -ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

230.1

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n .

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n .

(a) $D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

↓ dev L_1

$$= 2 D_{n+1} + (-1)^{1+2} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & -1 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

↪ de c₁

$$= 2 D_{\text{out}} - D_{\text{in}}$$

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ligne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ . Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ligne i .

→ revoir le lien avec matrices équivalentes

et les produits avec matrices de transvects...

Travailler sur les colonnes

$C_i \leftrightarrow C_j$ doit multi par (-1) antisymétrique (alterné)

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ où $j \neq i \rightarrow$ inchangé

$$\det \left(\dots | C_i + \lambda C_j | \dots | C_j | \dots \right)$$

$$= \det \left(\dots | C_i | \dots | C_j | \dots \right) + \lambda \underbrace{\det \left(\dots | C_j | \dots | C_j | \dots \right)}_{=0}$$

$$\underbrace{C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ ou } \frac{1}{\lambda} C_i}$$

$$\det \left(\dots | \lambda C_i | \dots \right) = \lambda \det \left(\dots | C_i | \dots \right)$$

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Preuve: On remarque que, par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} \overset{p}{A} & \overset{n-p}{B} \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \} n-p \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array} \right| \begin{matrix} \} p \\ \} n-p \\ \downarrow \text{div } L_n \end{matrix}$$

$$= (-1)^{nm} \left| \begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array} \right| \begin{matrix} \} p \\ \} n-p-1 \end{matrix}$$

per row $= \det(A)$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Remarque. Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double : $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i)$.

Preuve:

idée 1 $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$
 $\rightarrow$ valent pas

idée 2 $L_2 \leftarrow L_2 - a_n L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - a_n^2 L_1$
 $\vdots$
 $L_n \leftarrow L_n - a_n^{n-1} L_1$
 $\rightarrow$ valent pas

idée 3

$$\begin{aligned} L_n &\leftarrow L_n - a_n L_{n-1} \\ &\vdots \\ L_3 &\leftarrow L_3 - a_n L_2 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - a_n L_1 \end{aligned}$$

$$V(a_1 \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \dots & 0 \\ a_1(a_1 - a_n) & a_2(a_2 - a_n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \downarrow \text{dev } C_n$$

$$= (-1)^{n+1} (a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n) V(a_1 \dots a_{n-1})$$

$$= (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) V(a_1 \dots a_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1 \dots a_{n-1})$$

= ..

per reference

$$= \prod_{j=2}^n \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i) \right)$$

5.4 Rappel : comatrice, formule pour l'inverse

Définition. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs :

$$\text{Com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur relatif au coefficient (i, j) , c'est-à-dire le déterminant de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la

ligne i et la colonne j .

Proposition.

$$A \times (\text{Com}(A))^{\top} = (\text{Com}(A))^{\top} \times A = \det(A) I_n$$

et donc, si $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^{\top}$$

Preuve.

- Dans le produit $A \times (\text{Com}(A))^{\top}$, le coefficient (i, i) est :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$$

qui vaut $\det(A)$, par la formule de développement par rapport à la ligne L_i .

- Dans le produit $A \times (\text{Com}(A))^{\top}$, le coefficient (i, j) pour $i \neq j$ est :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}$$

qui vaut, par les formules de développement, le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j -ème ligne par sa i -ème ligne, ce qui en fait une matrice à deux lignes égales, donc à déterminant nul.

Ainsi $A \times (\text{Com}(A))^{\top} = \det(A) I_n$. Le calcul est analogue pour l'autre produit. $\square$

5.5 Annexe : une preuve élégante du calcul du déterminant de Vandermonde

Proposition.

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Preuve.

On suppose que $(a_1, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts. On forme :

$$P(t) = V(a_1, \dots, a_n, t)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & t \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} & t^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & t^n \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, $P(t)$ apparaît comme polynomiale en t :

$$P(t) = \clubsuit + \clubsuit t + \dots + \clubsuit t^{n-1} + V(a_1, \dots, a_n) t^n$$

Ce polynôme de degré (inférieur ou) égal à n admet n racines distinctes : $a_1, \dots, a_n$ et on connaît son coefficient dominant. On a donc la relation :

$$V(a_1, \dots, a_n, t) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (t - a_k)$$

et donc la relation de récurrence :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k)$$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

□

230.10

Soit a, b, c trois scalaires. On considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix}_{[n]}$$

- (a) Calculer $D_n(a, a, c)$ en fonction de a, c et n .
- (b) Montrer que $\varphi : x \mapsto D_n(a + x, b + x, c + x)$ est affine.
- (c) En déduire, pour $a \neq b$, $D_n(a, b, c)$ en fonction de a, b, c et n .

Montrer que :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

déterminant circulant

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 1 & 1 & & & 3 & \\ \vdots & 2 & & & n-1 & \\ \vdots & & & & n & \\ 1 & n-1 & & 2 & 1 & \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ &\vdots \\ L_n &\leftarrow L_n - L_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

dev C_1

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \quad [n-1]$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1-n & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ & -n & & & \\ & & (0) & & \\ & & & (0) & \\ 1 & & & & -n \end{vmatrix}$$

triangular

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times (-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^n \frac{n+1}{2} n^{n-1}$$

for me : 230.20
230.21

