

Bur me: 240.1, 240.2, 240.3

²⁰²⁷ MPI/MPI*

240

Diagonalisation

Je me souviens

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quel est l'endomorphisme canoniquement associé ?

2. Que signifie : « $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe » ?

$$u: E \longrightarrow E$$

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définition

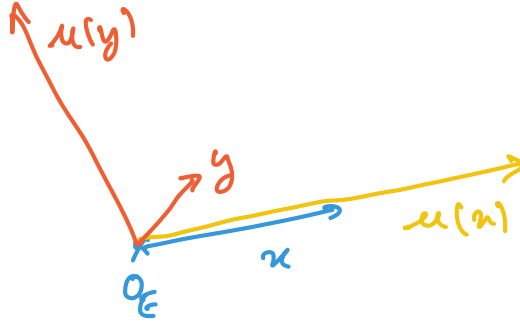
Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u lorsqu'il existe x non nul tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

Remarque. *Insistons : il faut qu'il existe un vecteur **non nul** tel que...*

Remarque. *Un vecteur propre, c'est un vecteur non nul tel que $u(x)$ est colinéaire à x .*



Définition. Si λ est une valeur propre de u , on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'espace :

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \\ &= \{x \in E, u(x) = \lambda x\} \end{aligned}$$

$$\text{Rq: } E_u(\lambda)$$

Définition. On appelle "équation aux éléments propres" l'équation :

$$u(x) = \lambda x$$

où l'on cherche les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions x non nuls à l'équation, et on cherche ces solutions aussi.

→ discuter selon λ

→ résoudre en x

1.2 Propriétés

Proposition. x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\underline{\text{Vect}(x)}$ est stable par u .

D

Preuve:

$\Rightarrow$ Soit x vecteur propre de u

Donc $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

On remarque

$$u(x) = \lambda x$$

$$\in \text{Vect}(x) = D$$

donc, par stabilité par CL $\text{Vect}(x)$ est stable par u

$\Leftarrow$ On suppose D stable par u
 ~~u stable par D~~

En particulier $u(x) \in D = \text{Vect}(x)$

$$\text{ie } \exists \lambda \text{ tq } u(x) = \lambda x$$

donc x est vecteur propre de u .

Théorème.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. On l'écrit donc :

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u) \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$$

Preuve:

Formalisons:

Prc la somme de p espaces propres associés à des v.p. distinctes est directe, par récurrence.

- $E_{\lambda_1}(u)$, tout seul, est "en somme directe".
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $E_{\lambda_1}(u) \dots E_{\lambda_{p-1}}(u)$ est en somme directe.

Prc $E_{\lambda_1}(u) \dots E_{\lambda_p}(u)$ est en somme directe.

Soit $x_1 \in E_{\lambda_1}(u), \dots, x_p \in E_{\lambda_p}(u)$

$$\text{Or } x_1 + \dots + x_p = 0_E \quad (1)$$

$$\text{Pqce } x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

$$\text{On a alors: } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \quad (2)$$

$$(2) - \lambda_p (1): \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p) x_1 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1}}_{\in E_{\lambda_p}(u)} = 0_E$$

par HR, $E_{\lambda_1}(u) \dots E_{\lambda_{p-1}}(u)$ sont en somme directe

$$\text{donc } \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_p) x_1 = 0_E \\ \vdots \\ (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1} = 0_E \end{cases}$$

$$\text{Or les } \lambda_i \text{ sont distincts donc } \begin{cases} x_1 = 0_E \\ \vdots \\ x_{p-1} = 0_E \end{cases}$$

$$\text{Reprenant (1) } x_p = 0_E$$

D'où le résultat.

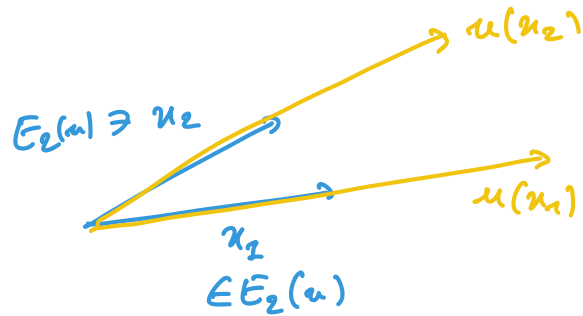
Théorème.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i deux à deux distinctes, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Ex. 2 et 3



Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Tout sous-espace propre de u est stable par v
- $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$$

$$\text{stable par } v \quad \text{car} \quad (u - \lambda \text{Id}_E) \circ v = v \circ (u - \lambda \text{Id}_E)$$

v.p. et espaces propres

1.3 Exemples

Exemple. Soit E un espace vectoriel. Déterminer les éléments propres de :

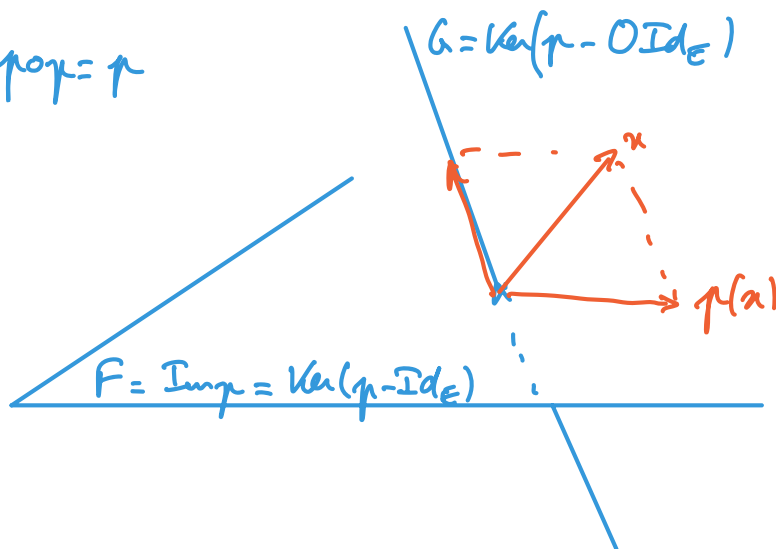
1. p projecteur de E
2. s symétrie de E
3. h homothétie de rapport k

③ $\forall x \in E, h(x) = kx$

donc k v.p. de h et $E_k(h) = E$

Tout vecteur (non nul) est vecteur propre, associé à k

① $p \circ p = p$



2. v.p. : 0 et 1 $E_0(p) = G$

$E_1(p) = F$

D'autres v.p. ?

Si λ autre v.p.,
Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$

$E_0(p) \oplus E_1(p) \oplus E_\lambda(p) \subset E$
 $\parallel$
 E

donc $\dim E_\lambda(p) = 0$

donc λ n'est pas v.p.

Exemple. Déterminer les éléments propres de :

$$1. \quad u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Écrivons l'éq. aux éléments propres:

$$P' = \lambda P$$

on est amené à discuter

On cherche les const sur λ pour qu'il existe $P \neq 0$ solution
(et, dans ce cas, les P solutions).

1^{er} cas : $\lambda = 0$

$$P \in E_0(u) \Leftrightarrow P' = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_0[X] \quad (P \text{ constant})$$

donc 0 est vp. et $E_0(u) = \mathbb{K}_0[X]$

2^e cas : $\lambda \neq 0$

Si P est vecteur propre associé à λ

$$\text{alors } P' = \lambda P$$

$$\text{Si } P \text{ constant, } 0 = \lambda P \text{ donc } P = 0$$

donc P n'est pas vecteur propre

$$\text{Si } P \text{ non constant, } \deg P' = \deg P$$

" "
 $\deg(P) - 1$ absurde.

Bref : λ n'est pas vp de u .

$$2. \quad v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f \mapsto f'$$

Éq aux éléments propres:

$$f' = \lambda f$$

On cherche les cond sur λ pour qu'il existe $f \neq 0$ solution

et, dans ce cas, les solutions

On reconnaît une E.D. linéaire, d'ordre 1, à coeff constants, homogène.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'es. des sol est

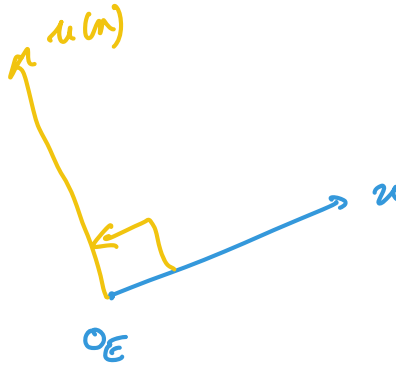
$$\{ x \mapsto A e^{\lambda x}, A \in \mathbb{R} \}$$

Donc λ est vp de v et

$$E_\lambda(v) = \text{Vect} (x \mapsto e^{\lambda x})$$

Exemple. Donner un exemple simple d'endomorphisme du plan euclidien usuel qui n'a aucune valeur propre.

u : rotation (vecto) d'angle $\frac{\pi}{2}$



Remq: λ valeur propre $\Leftrightarrow u - \lambda \text{Id}_E$ non injective

λ valeur spectrale $\Leftrightarrow u - \lambda \text{Id}_E$ non bijective

1.4 En dimension finie

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } u &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow u - \lambda \text{Id}_E \text{ non bijective} \quad \text{car } u \text{ endomorphisme de } E \text{ qui est de dimension finie.}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{der}(u - \lambda \text{Id}_E) = \emptyset$$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre de u** :

$$\begin{aligned}\text{Sp}(u) &= \{\lambda \in \mathbb{K}, u - \lambda \text{Id}_E \notin \text{GL}(E)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } u\}\end{aligned}$$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \text{GL}(E) \iff 0 \notin \text{Sp}(u)$$

u inversible $\iff 0$ n'est pas vp. de u

$$E_0(u) = \text{Ker}(u)$$

2 Éléments propres d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :

$$\begin{array}{ccc} u_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Ainsi, λ est une **valeur propre de A** s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre de A , associé à λ** . L'espace $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'**espace propre associé à λ** , et l'équation :

$$AX = \lambda X$$

est l'**équation aux éléments propres**. Le **spectre de A** , noté $\text{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A .

Les vecteurs propres de A sont des colonnes.

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

$$\lambda \text{ vp} \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$

2.2 Critère d'inversibilité

Proposition. Avec les notations de la définition :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(A)$$

2.3 Un mot sur le corps de base

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc chercher les valeurs propres réelles ou les valeurs propres complexes de A . On note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et on a :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme

3.1 Lien entre matrice et endomorphisme

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$$

- Les vecteurs propres de A sont les matrices des vecteurs propres de u :

$$X \in E_\lambda(A) \iff AX = \lambda X$$

$$\iff u(x) = \lambda x$$

$$\iff x \in E_\lambda(u)$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

E
 $\mathcal{B}$ bon

matriciel

vectorel

$$A \in \mathcal{M}_n(K) \longleftrightarrow u \in \mathcal{L}(E)$$

$$\lambda \text{ vp de } A \longleftrightarrow \overset{=}{\lambda \text{ vp de } u}$$

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \longleftrightarrow x \text{ vecteur propre de } u$$

vecteur propre de A

$$E_\lambda(A) \longleftrightarrow E_\lambda(u)$$

3.2 Éléments propres et matrices semblables

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

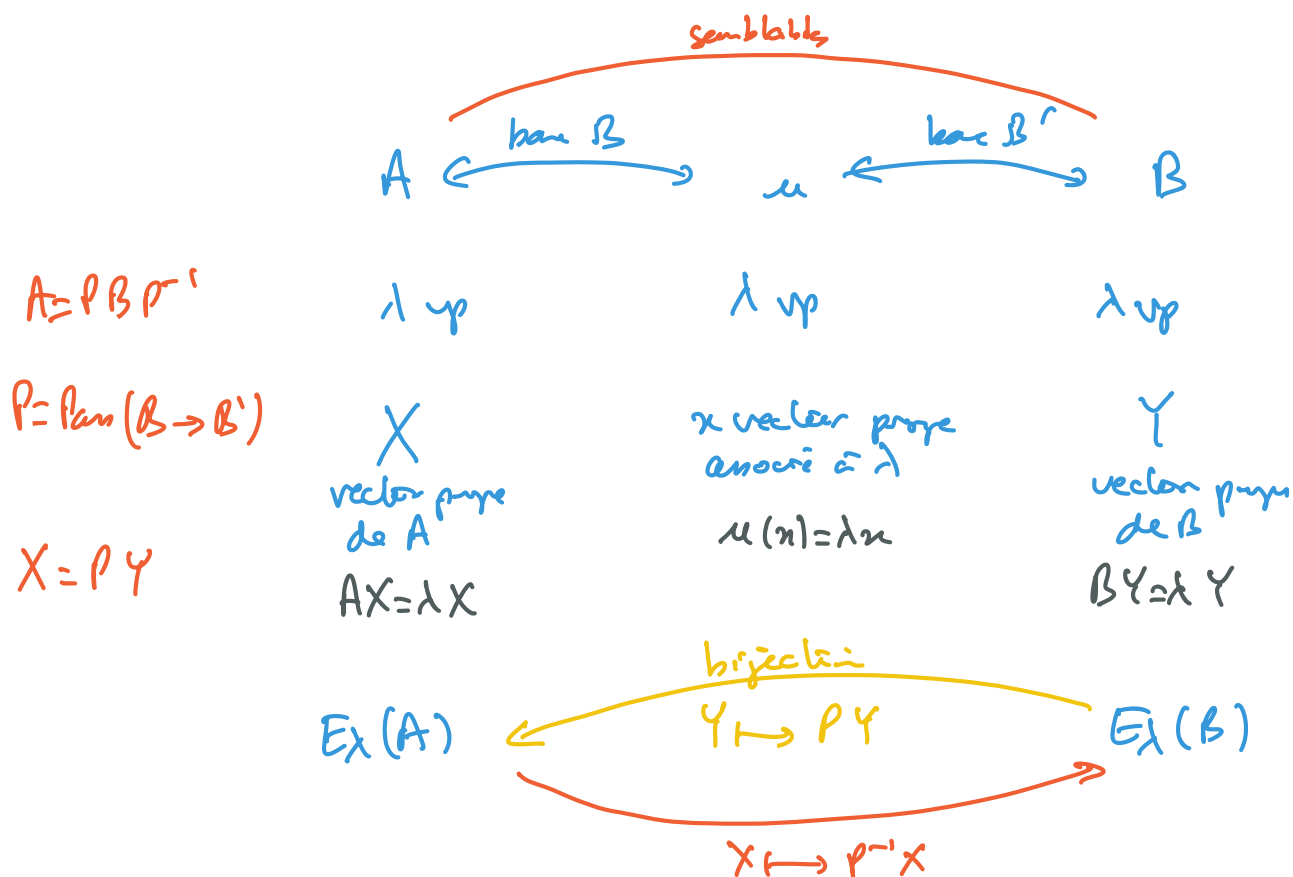
- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$$

- Les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de B sont liés par la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X) \\ &\iff P^{-1}X \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

$X \mapsto P^{-1}X$ est un isomorphisme de $E_\lambda(A) \rightarrow E_\lambda(B)$.



4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique** de A .

~~$$\chi_A = \det(A - XI_n)$$~~

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \pm 1}}{\varepsilon(\sigma)} \left(X \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ ou } 1}}{\delta_{\sigma(1)1}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{K}}}{a_{\sigma(1)1}} \right) \left(X \delta_{\sigma(2)2} - a_{\sigma(2)2} \right) \dots \left(X \delta_{\sigma(n)n} - a_{\sigma(n)n} \right)$$

c'est un polynôme, dans $\mathbb{K}_n[X]$

de degré exactement n

(seulement pour $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{R}, n}$ degré n
sinon degré $< n$)

de coeff constant : $(-1)^n \det(A)$

Bref : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$
 $= x^n + \dots + (-1)^n \det A$

Proposition. Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique χ_A .

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A$$

preuve : $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible}$

$$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\iff (-1)^n \chi_A(\lambda) = 0$$

Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & \cdots & \\ 0 & a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(X \delta_{\sigma(1)1} - a_{\sigma(1)1} \right) \left(X \delta_{\sigma(2)2} - a_{\sigma(2)2} \right) \dots \left(X \delta_{\sigma(n)n} - a_{\sigma(n)n} \right)$$

termes en X^{u-1}

- Si $\sigma \neq \text{Id}_{[1,n]}$ dans le produit, au moins 2 termes contribuent
→ contribution des $K_{u-2}[X]$

- Seule contribution, en X^{u-1} avec $\sigma = \text{Id}_{[1,n]}$

$$(X - a_{11})(X - a_{22}) \dots (X - a_{nn})$$

$$= X^n + X^{u-1} (-a_{11} - a_{22} \dots - a_{nn}) + X^{u-2} \dots$$

↑
en développant, choisir de $(u-1)X$ et 1 constant

$$= X^n + X^{u-1} (-\text{tr}(A)) + \dots$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 0 & X & -X \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \quad \text{on factorise par } X \text{ dans } L_2$$

$$= X \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= X \begin{vmatrix} X+2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & X-1 \end{vmatrix} \quad \text{dev } L_2$$

$$= X (-1)^{3+2} (-1) \begin{vmatrix} X+2 & -1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= X (X^2 - 3)$$

$$= X (X - \sqrt{3}) (X + \sqrt{3})$$

$$\text{Donc } Sp(A) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -(X-1) & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X-3 & -1 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + C_1$$

div L_1

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2 (X-3)$$

Ainsi $Sp(B) = \{1, 3\}$

1 racine double de χ_B

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_c = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad \text{ne pas se tromper dans les signes}$$

$$= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \quad \text{div } C_1$$

$$= (X-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (X^2 - 4X + 4)$$

$$= (X-2)^3$$

$$Sp(C) = \{ 2 \}$$

↑ racine triple de χ_c

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_F = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{n_1} = X^3 - 1$$

$$\textcircled{n_2} \chi_F = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

determinant circulant

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

div C_1

$$= (X-1)(X^2 + X + 1)$$

irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

↳ dans $\mathbb{C}[X]$ $(X-j)(X-j^2)$

$$S_{p_{\mathbb{R}}}(F) = \{1\}$$

$$S_{p_{\mathbb{C}}}(F) = \{1, j, j^2\}$$

4.2 Multiplicité, propriétés

Définition. On dit que λ est valeur propre de A de **multiplicité** m lorsque λ est racine de multiplicité m de χ_A .

mult. d'une cp = mult. en tant que racine de χ_A .

Proposition. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Proposition. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comptées avec multiplicité, est n .

$$\deg \chi_A = n$$

somme des multiplicités des racines $\leq n$

Dans $\mathbb{C}[X]$, χ_A scinde donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m(\lambda) = n$

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

$\deg \chi_A$ impair $\chi_A(X) = X^n - b_1 X^{n-1} + \dots$

donc $\chi_A(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$

$\chi_A(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$ car n impair

kr le kr des v. I, $\exists t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \chi_A(t_0) = 0$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A , alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A , avec même multiplicité.

$$\begin{aligned}
 \lambda \in S_p(A) &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overline{\chi_A(\lambda)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \chi_A(\bar{\lambda}) = 0 \\
 &\quad \text{car } \chi_A \in \mathbb{R}[X] \\
 &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in S_p(A)
 \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et A^T ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Remarque. A et A^T ont les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres. On peut cependant montrer que, pour λ valeur propre, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^T)$ ont la même dimension.

$$\begin{aligned}
 \chi_{A^T} &= \det(XI_n - A^T) \\
 &= \det((XI_n - A)^T) && \text{car } I_n^T = I_n \\
 &= \det(XI_n - A) \\
 &= \chi_A
 \end{aligned}$$

donc $S_p(A^T) = S_p(A)$

$$\begin{aligned}
 \dim E_\lambda(A^T) &= \dim \ker(A^T - \lambda I_n) \\
 &= n - \text{rg}(A^T - \lambda I_n) \\
 &= n - \text{rg}((A - \lambda I_n)^T)
 \end{aligned}$$

$$= n - \operatorname{rg} (A - \lambda I_n)$$

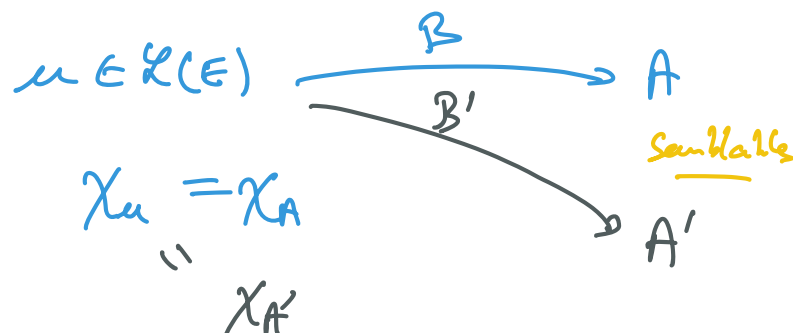
$$= \dim \operatorname{Ker} (A - \lambda I_n)$$

$$= \dim E_\lambda (A)$$

4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de u** le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u dans une base.



On suppose

$$A = P A' P^{-1}$$

$$\chi_A = \det (X I_n - A)$$

$$= \det (X I_n - P A' P^{-1})$$

$$= \det (P (X I_n - A') P^{-1})$$

$$= \det (X I_n - A')$$

$$= \chi_{A'}$$

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Alors χ_{u_F} divise χ_u .

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ , alors :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

