

Déterminants

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E . Elle est aussi antisymétrique.

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_1 \dots x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

propriétés:

• n -linéaire

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, \lambda x_2 + \mu x'_2, \dots, x_n)$$

$$= \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_2 \dots x_n)$$

$$+ \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x'_2, \dots, x_n)$$

• alterné

Si 2 vecteurs sont égaux, $\det_B(\dots) = 0$

- antisymétrique

Si on échange 2 vecteurs, on change le signe du déterminant

$$\begin{aligned}\det_B(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) \\ = - \det_B(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_n$ = groupe symétrique

$$= \{ \text{permutations de } [1, n] \}$$

$$= \{ \text{bijection : } [1, n] \rightarrow [1, n] \}$$

$$= \{ \text{"mélange" de } [1, n] \}$$

transposition = échange de 2 éléments

$\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions ie

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \exists \tau_1, \dots, \tau_k \text{ transpositions tq}$$

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

$$\det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

$$= (-1)^k \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \varepsilon(\sigma) \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E$$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

$$u \in \mathcal{L}(E)$$

$$u: E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto u(x)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{u} (u(x_1), \dots, u(x_n))$$

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\prod_{\mathbb{K}}$$

$$\uparrow$$

$$\prod_{\mathbb{K}}$$

indép de $(x_1, \dots, x_n)$

indép de $\mathcal{B}$

$\det(u)$ = coeff multiplicateur du déterminant d'une famille de vecteurs.

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
- $u \in \text{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0 \text{ et } \det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

(P1) $\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$

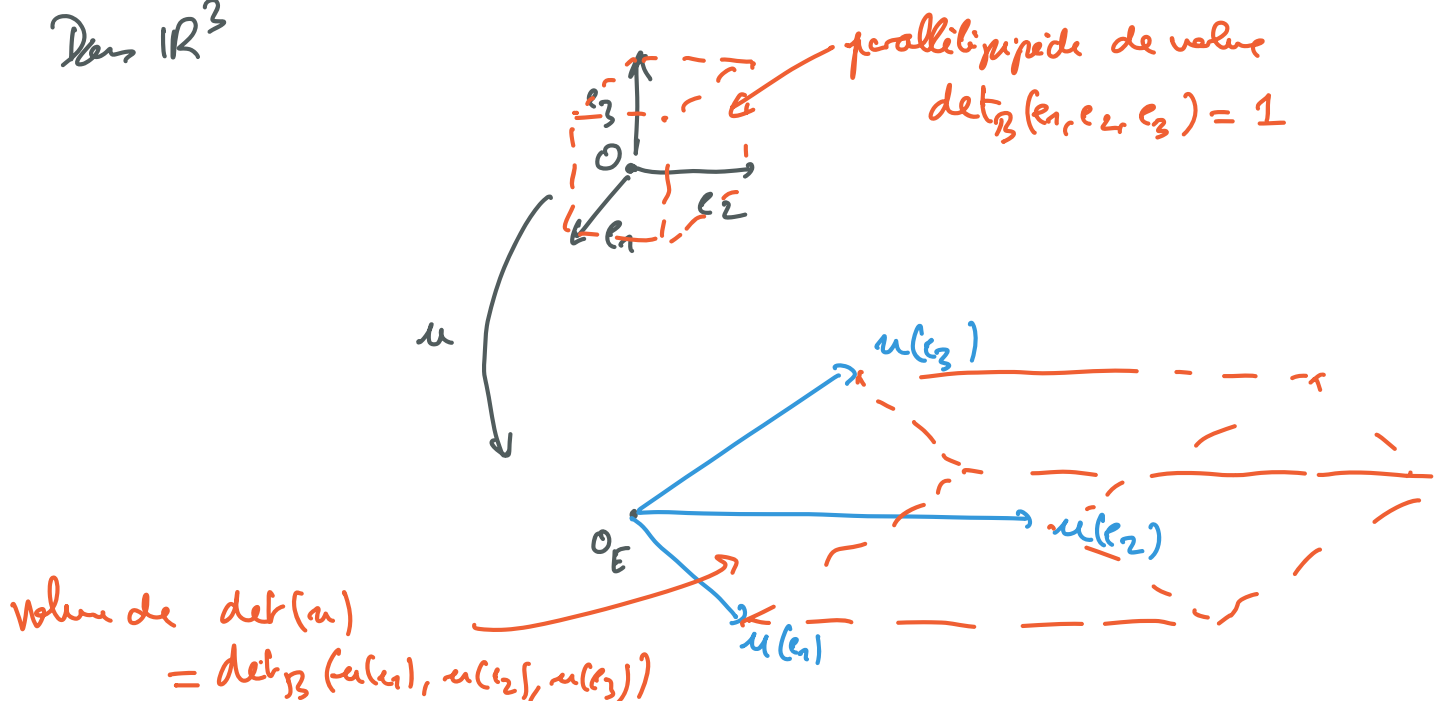
$$\begin{aligned} \det_B(u \circ v(x_1) \dots u \circ v(x_n)) \\ &= \det(u) \det_B(v(x_1) \dots v(x_n)) && \text{d'après le lemme} \\ &= \underbrace{\det(u) \times \det(v)}_{\text{c'est } \det(u \circ v) \text{ par unicité}} \det_B(x_1, \dots, x_n) && \text{d'après le lemme} \end{aligned}$$

(P2) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$

$$\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{par def.}$$

$$\begin{aligned} \det_B(u(e_1), \dots, u(e_n)) &= \det(u) \det_B(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(u) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^3$



3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A .

Remarque. C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \dots, C_n)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\text{can}}(C_1, \dots, C_n)$$

où $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ colonnes

donc le dét d'une matrice est linéaire par rapport aux colonnes de la matrice, et altère, antisymétrique.

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$\underline{n=2} \quad \mathcal{S}_2 = \left\{ \overset{id}{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma \text{ by } \sigma(1)=1 \text{ et } \sigma(2)=2}}, \overset{\tau}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} = \varepsilon(id) a_{id(1)1} a_{id(2)2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \overset{id}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}, \overset{t_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \\ \overset{t_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{t_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \\ \overset{c_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{c_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \quad \leftarrow \sigma = id$$

$$+ a_{21} a_{32} a_{13} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sigma = c_1 \\ \varepsilon(c_1) = +1 \end{array}$$

$$+ a_{31} a_{12} a_{23} \quad \leftarrow \sigma = c_2$$

$$- a_{31} a_{22} a_{13} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sigma = t_2 \\ \varepsilon(t_2) = -1 \end{array}$$

$$- a_{11} a_{32} a_{23} \quad \leftarrow \sigma = t_1$$

$$- a_{21} a_{12} a_{33} \quad \leftarrow \sigma = t_3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & & & ' \\ a_{31} & & & ' \\ a_{41} & - & - & a_{44} \end{vmatrix} = 24 \text{ terms}$$

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

$$\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$$

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

- $\det(A^\top) = \det(A)$

- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0 \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det(\lambda C_1 | \lambda C_2 | \dots | \lambda C_n) \\ &= \lambda \det(C_1 | \lambda C_2 | \dots | \lambda C_n) \\ &= \lambda^n \det(C_1 | C_2 | \dots | C_n) \end{aligned}$$

A et B semblables $\Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

$$\Leftrightarrow A = P B P^{-1}$$

$$\det A = \det(P B P^{-1})$$

$$= \det P \det B \det P^{-1}$$

$$= \det P \cdot \frac{1}{\det P} \det B$$

$$A \iff u \iff B$$

4 Calcul de déterminants

n-linéarité par rapport aux colonnes

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n . Pour tout i, j , on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij} .

On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Théorème.

Le développement par rapport à la j -ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i -ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

230.1

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n .

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n .

$D_{n+2} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(Handwritten notes: A yellow line is drawn under the first row. A yellow vertical line is drawn under the second column. The first row is labeled (0) and the second column is labeled (0). A green arrow points to the bottom right corner with the text "dev L1".)

$$= (-1)^{1+1} 2 \underbrace{\begin{vmatrix} A_{n+1} \end{vmatrix}}_{\Delta_{11} \text{ minor}}$$

$$+ (-1)^{1+2} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & & & \\ -1 & \diagdown & & \\ & \diagdown & \diagdown & \\ 0 & 0 & A_n & -1 & 2 \end{matrix}} & & & \end{vmatrix} \quad \downarrow \text{dev } C_1$$

$$= 2 D_{n+1} - D_n$$

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

dév L_n $\mathcal{D}_n = 0 + \dots + 0 + (-1)^{n+n} a_{nn} \mathcal{D}_{n-1}$

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition. (*idem colonnes*)

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ligne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ . Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ligne i .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -20 \end{vmatrix}$$

det en 3-linéaire alterné
par rapport à ses lignes.

$$\xrightarrow{\text{Fact par } -4 \text{ dans } L_3} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 7L_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} - 7 \underbrace{\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_2 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ car alterné}}$$

$$\det \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma = \text{transp} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = (-1) \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_2 + 4L_3}$$

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Ring: Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ par blocs,
pas de calcul de $\det$ directement.

Preuve: Oh!

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \det \Pi = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{vmatrix}$$

det L_n

$$= \underbrace{(-1)^{nm}}_{+1} \cdot 1.$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} A & \vdots & * \\ \hline 0 & \vdots & I_{p-1} \end{array} \right|$$

per ricorrenza

$$= \det(A)$$

de même pour l'autre matrice.

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_p$$

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Remarque. Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double : $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i)$.

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} \downarrow \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_1 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_n^2 - a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} \downarrow \text{dev } L_1 \\ \end{matrix} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_n^2 - a_1^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

on peut factoriser
par $a_2 - a_1$

"
par $a_n - a_1$

$$= (a_2 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & & & \\ a_2 + a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=0}^{n-2} a_2^i a_1^{n-2-i} & & & \end{vmatrix}$$

↑
Euh... et après ?

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$L_n \leftarrow L_n - a_n L_{n-1}$$

puis

$$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_n L_{n-2}$$

puis

$$L_2 \leftarrow L_2 - a_n L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 a_n & a_2 a_n & \dots & 0 \\ a_1^2 - a_n a_1 & a_2^2 - a_n a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} & a_2^{n-1} - a_n a_2^{n-2} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

div C_n

$$= (-1)^{1+n} \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_n & \dots & a_{n-1} - a_n \\ a_1(a_1 - a_n) & & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}$$

or factorise the columns

$$= (-1)^{n+1} (a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $n-1 \text{ terms}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V(a_1 \dots a_{n-1})}$

$$= (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) V(a_1 \dots a_{n-1})$$

bel de recurrence: $V(a_1 \dots a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1 \dots a_{n-1})$

per ric:

$$\begin{aligned}
 V(a_1 \dots a_n) &= (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \\
 &\quad (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_2) \dots (a_{n-1} - a_{n-2}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\
 &\quad (a_2 - a_1)
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=2}^n \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i) \right)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

5.1 Annexe : applications n -linéaires alternées

Définition.

- Une application

$$\begin{aligned} f : E^n &\rightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est dite **n -linéaire** lorsque, pour tout i , tout $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, l'application :

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire.

On parle de **forme n -linéaire** lorsque $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$.

- Elle est dite **alternée** si on a l'implication :

$$\exists i \neq j \text{ t.q. } x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- Elle est dite **antisymétrique** si :

$$\begin{aligned} \forall i \neq j, f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots) \\ = -f(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \text{ place}}}{x_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \text{ place}}}{x_j}, \dots) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition. f est antisymétrique si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition.

- Si f est alternée, alors f est antisymétrique.
- Si f est antisymétrique et que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors f est alternée.

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . L'espace des formes n -linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

Plus précisément.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n -linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. L'unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que :

$$\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

est appelée **déterminant dans la base $\mathcal{B}$** , et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Proposition. Soit ϕ une forme n -linéaire alternée sur un espace un espace vectoriel de dimension n , et on suppose que ϕ n'est pas nulle. Alors, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E :

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}$$

Remarque. La propriété généralise le résultat annoncé pour le déterminant dans une base $\mathcal{B}$.

Preuve.

$\Leftarrow$ On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ liée, donc l'un des vecteur est CL des autres :

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i x_i$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &= \phi\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i x_i, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad \text{par } n\text{-linéarité} \\ &= 0 \text{ car } \phi \text{ alternée} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ libre, donc c'est une base de E , notée $\mathcal{B}$. Comme ϕ est une forme n -linéaire alternée non nul, il existe λ non nul tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Et donc $\phi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda \neq 0$.

□

5.2 Annexe de l'annexe : démonstration du théorème de structure

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n -linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n -linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve pour $n = 2$. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ dans E , et ϕ une forme 2-linéaire alternée sur E . On calcule :

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1\phi(e_1, e_1) + x_1y_2\phi(e_1, e_2) \\ &\quad + x_2y_1\phi(e_2, e_1) + x_2y_2\phi(e_2, e_2) \text{ par 2-linéarité} \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\phi(e_1, e_2) \text{ car alterné et antisymétrique}\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$, et la seule forme 2-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, e_2) = 1$ est $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$. $\square$

Preuve pour $n = 3$. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ dans E , et ϕ une forme 3-linéaire alternée sur E . On calcule :

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \phi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) \\ &= x_1y_1z_1\phi(e_1, e_1, e_1) + \dots \text{ par 3-linéarité} \\ &\quad (27 \text{ termes, dont plein sont nuls car } \phi \text{ alternée}) \\ &= x_1y_2z_3\phi(e_1, e_2, e_3) + x_1y_3z_2\phi(e_1, e_3, e_2) + x_2y_2z_3\phi(e_2, e_2, e_3) \\ &\quad + x_2y_3z_2\phi(e_2, e_3, e_2) + x_3y_2z_3\phi(e_3, e_2, e_3) + x_3y_3z_2\phi(e_3, e_3, e_2) \\ &= (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \\ &\quad - x_3y_2z_1)\phi(e_1, e_2, e_3) \text{ par antisymétrie}\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à $(x, y, z) \mapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$, et la seule forme 3-linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, e_2, e_3) = 1$ est $(x, y, z) \mapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$. $\square$

Preuve pour n quelconque. Soit E espace de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , ϕ une forme n -linéaire alternée sur E . Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire que, pour tout j , $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &\quad \text{en posant } \sigma(k) = i_k \\ &= \sum_{\substack{\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ \sigma \text{ bijective}}} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &\quad \text{car } \phi \text{ est alternée} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \phi(e_1, \dots, e_n) \\ &\quad \text{car } \phi \text{ est antisymétrique} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \phi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

Donc ϕ est proportionnelle à l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$, et la seule forme n -linéaire alternée satisfaisant $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$\square$

5.3 Annexe : indépendance du choix de la base pour le calcul de $\det(u)$

Construction. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{B}$ de E . L'application :

$$\phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

est une forme n -linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Ce λ est unique, on l'appelle **le déterminant de u** et on le note $\det(u)$.

Remarque. On retient : Pour toute base $\mathcal{B}$ et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on calcule :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ &\quad \text{par changement de base} \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad \text{par changement de base} \end{aligned}$$

C'est donc bien le même coefficient λ pour la base $\mathcal{B}'$. $\square$

5.4 Rappel : comatrice, formule pour l'inverse

Définition. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs :

$$\text{Com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur relatif au coefficient (i, j) , c'est-à-dire le déterminant de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la

Preuve.

- Dans le produit $A \times (\text{Com}(A))^T$, le coefficient (i, i) est :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$$

qui vaut $\det(A)$, par la formule de développement par rapport à la ligne L_i .

ligne i et la colonne j .

Proposition.

$$A \times (\text{Com}(A))^T = (\text{Com}(A))^T \times A = \det(A) I_n$$

et donc, si $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T$$

- Dans le produit $A \times (\text{Com}(A))^T$, le coefficient (i, j) pour $i \neq j$ est :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}$$

qui vaut, par les formules de développement, le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j -ème ligne par sa i -ème ligne, ce qui en fait une matrice à deux lignes égales, donc à déterminant nul.

Ainsi $A \times (\text{Com}(A))^T = \det(A) I_n$. Le calcul est analogue pour l'autre produit. $\square$

5.5 Annexe : une preuve élégante du calcul du déterminant de Vandermonde

Proposition.

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Preuve.

On suppose que $(a_1, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts. On forme :

$$P(t) = V(a_1, \dots, a_n, t)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & t \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} & t^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & t^n \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, $P(t)$ apparaît comme polynomiale en t :

$$P(t) = \clubsuit + \clubsuit t + \dots + \clubsuit t^{n-1} + V(a_1, \dots, a_n) t^n$$

Ce polynôme de degré (inférieur ou) égal à n admet n racines distinctes : $a_1, \dots, a_n$ et on connaît son coefficient dominant. On a donc la relation :

$$V(a_1, \dots, a_n, t) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (t - a_k)$$

et donc la relation de récurrence :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k)$$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

□

230.10

Soit a, b, c trois scalaires. On considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix}_{[n]}$$

- (a) Calculer $D_n(a, a, c)$ en fonction de a, c et n .
- (b) Montrer que $\varphi : x \mapsto D_n(a + x, b + x, c + x)$ est affine.
- (c) En déduire, pour $a \neq b$, $D_n(a, b, c)$ en fonction de a, b, c et n .

Montrer que :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

