

Par me : 630.5, 630.11

640.3, 640.5

2027 MPI/MPI*

640

Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre

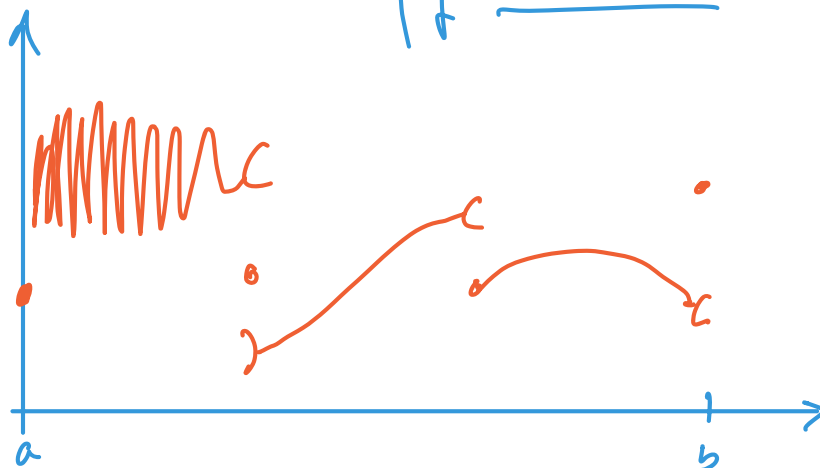
Fonctions continues par morceaux

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?
3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux ? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux ?
4. Prêt à le démontrer ?
5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ possède une structure particulière ?

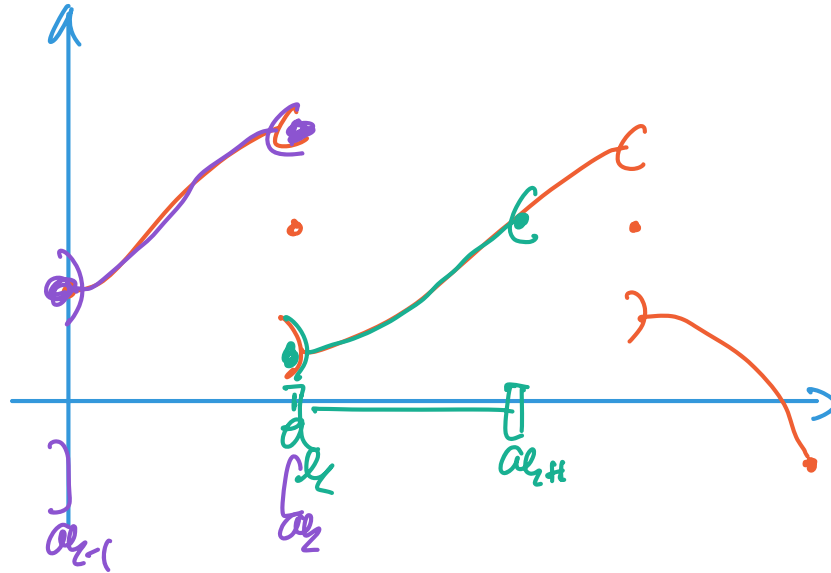
② f est cpm sur $[a, b]$ ssi

$\exists \sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subd. de $[a, b]$

$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur }]a_k, a_{k+1}[\\ f \text{ a une limite finie en } a_{k+1} \text{ à droite} \\ f \text{ ————— } a_{k+1} \text{ à gauche} \end{array} \right.$



Bref: $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge à $[a_k, a_{k+1}]$ en une fct continue.



Intégrale d'une fonction cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_b^a f(t) dt$?
7. Énoncer la relation de Chasles.
8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale?
9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale? la croissance de l'intégrale?
10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales?
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive?

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) dt &= - \int_b^a f(t) dt \\ &= \int_{[a,b]} f(t) dt\end{aligned}\quad \text{longue } a < b$$

⑨ Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$,
ie $\forall t \in [a, b] \quad f(t) \geq 0$

alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$



Si $\forall t \in [a, b] \quad f(t) \leq g(t)$

où f, g continues (par morceaux) sur $[a, b]$ $a \leq b$

alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

⑪ Si $\int_a^b f(t) dt = 0$

et f positive et continue

et pas continue par morceaux

Alors $\forall t \in [a, b] \quad f(t) = 0$

On y fait référence:

"intégrale nulle d'une fct continue positive".

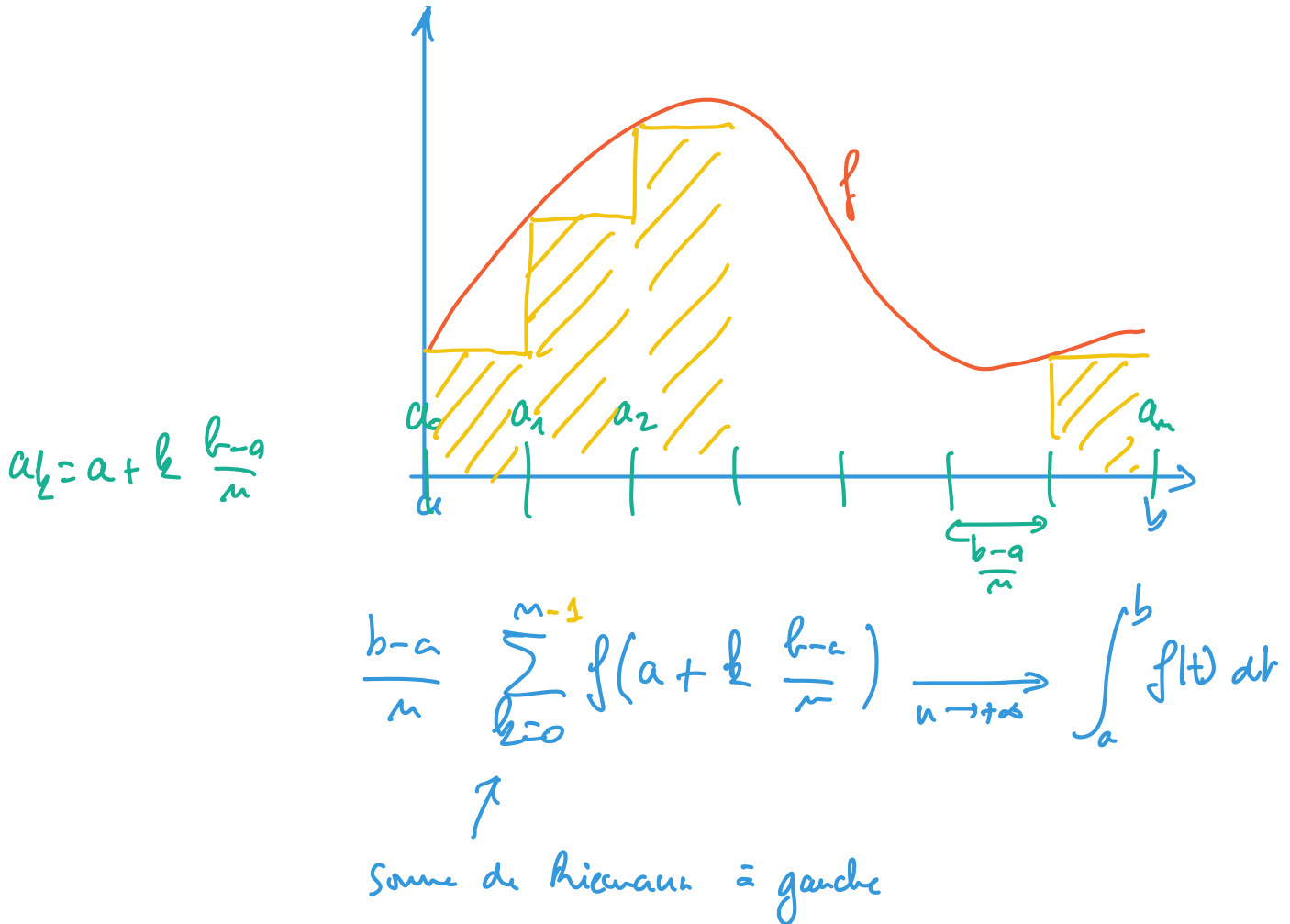
$$\text{Si } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = 0 \quad \text{alors } \forall n \quad a_n = 0$$

"Somme nulle de termes ≥ 0 ".

Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann ?

Définition Soit f continue (par max) sur $[a, b]$



Autre version $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ "droite"

Autre version th, on considère th $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Utilisation:

idée 1

approcher $\int_a^b f(t) dt$ par une somme finie
(méthode des rectangles)

→ lent, pas efficace

idée 2. Déterminer la limite de certaines sommes.

→ cf ex.

ce qui compte:

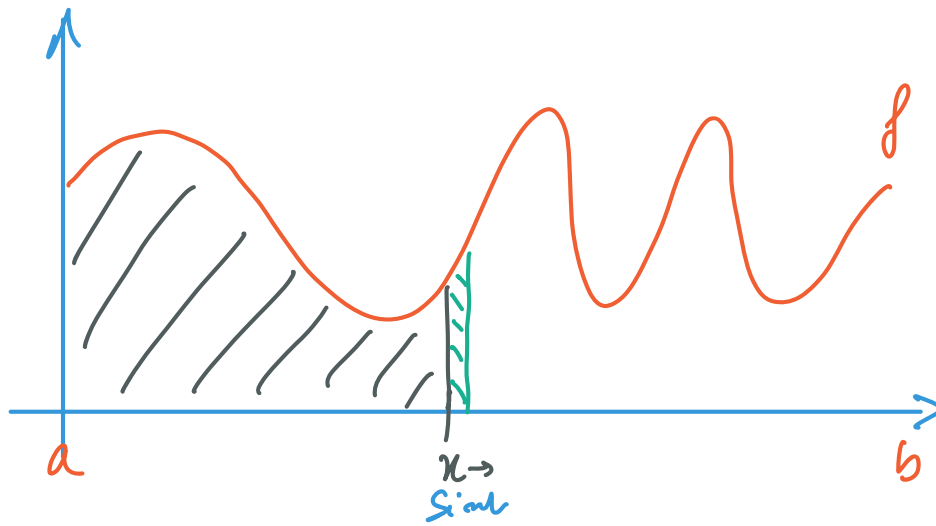
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$
$$\int \dots$$

Penser à parler de continuité (par exemple).

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{nombre.}$$

$$\int_a^x f(t) dt \quad \text{fonction de } x \text{ bornée d'en haut}$$



$$\int_a^x f(t) dt$$

$$\underbrace{\int_a^{x+dx} f(t) dt}_{\approx} \int_a^x f(t) dt + f(x) dx$$

$$\frac{\int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{dx} \approx f(x)$$

Intégrale et primitive

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?
14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues ?
15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?
16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.
17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$?

(13) Une primitive de f sur I

est une fct F tq $F' = f$
 $\uparrow$
 dérivable

(14) $\mathcal{C}^1$.

(15 bis) $G: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

- si f continue par morceaux, G existe sur I
 G est dérivable à gauche et à droite en tout point

$$\text{et } \begin{aligned} G'_g(x) &\leftarrow \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \\ G'_d(x) &\leftarrow \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \end{aligned}$$

- si f continue sur I , G existe sur I
 et G dérivable sur I et $\forall x \in I, G'(x) = f(x)$
 et donc G est $\mathcal{C}^1$ sur I

En path: $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

$$\begin{aligned}
 (17) \quad H(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt && F(v(x)) - F(u(x)) \\
 &= \int_a^{v(x)} f(t) dt - \int_a^{u(x)} f(t) dt
 \end{aligned}$$

Si f est continue sur I intervalle, $a \in I$
 u, v dérivables, à valeurs dans I

$$H'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

(Si on introduit F :

f est continue sur I intervalle,
 donc admet des primitives. Soit F une telle
 primitive, par ex: $F(x) = \int_a^x f(t) dt.$)

Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?

19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

On calcule, par parties :

$$\int_0^1 t e^{-t} dt = \left[t \frac{e^{-t}}{-1} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{-t}}{-1} dt$$
$$= -e^{-1} + \left[\frac{e^{-t}}{-1} \right]_0^1$$
$$= \dots$$

par parties, avec $f e^1$:

$$\int_0^1 \underbrace{f(t)} \sin ut dt$$

$u \rightarrow +\infty$?

$$= \left[\dots \right] - \int f'(t) \frac{(-1)^n}{n} \cos(ut)$$

$$\textcircled{19} \cdot \int_0^1 \cos^4 t \sin t dt = \left[(-1) \frac{\cos^5 t}{5} \right]_0^1$$

ou pose $u = \cos t$

$$du = -\sin t dt$$

t de 0 à 1

u de 1 à $\cos 1$

$$= \int_1^{\cos 1} u^4 (-1) du$$

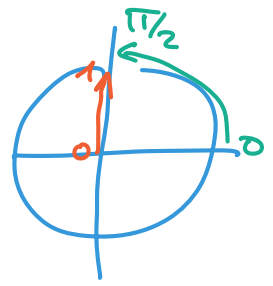
$$= \left[+ \frac{u^5}{5} \right]_{\cos 1}^1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

On pose $x = \sin t$

$$dx = \cos t dt$$

x de 0 à 1 t de 0 à $\frac{\pi}{2}$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt \quad \left. \begin{array}{l} \cos t \geq 0 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \quad [\dots]$$

• Théorème:

Soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta]$
 $t \longmapsto \varphi(t)$

φ^1 , bijective, strictement croissante

alors c'est un changement de variable.

$$\int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. Donner une primitive de $\ln x$.
22. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.
23. Donner une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.
24. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

(20) Sur $] -1, 1[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

est $x \mapsto \text{Arctan } x$

(21) Primitive de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$

$x \ln x - x$

(primitivable par parties)

(22) $\frac{1}{1+x^2}$ a primitive en $\text{Arctan } x$ sur $\mathbb{R}$

$$(23) \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

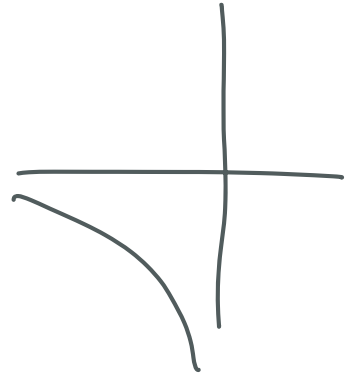
donc $\frac{1}{1-x^2}$ a primitive sur $I =]1, +\infty[$
ou $I =]-1, 1[$
ou $I =]-\infty, -1[$

$$\text{en } -\frac{1}{2} \ln |1-x| + \frac{1}{2} \ln |1+x| = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)$$

~~$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) \quad \text{sur }]0, +\infty[$$~~

~~$$\int \frac{1}{u} du = \ln(-u) \quad \text{sur }]-\infty, 0[$$~~

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| \quad \text{sur }]0, +\infty[\\ \text{et sur }]-\infty, 0[$$



(24)
$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2 + 1}$$

se primitive sur $\mathbb{R}$ (continue de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$)

en $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (x+\frac{1}{2}) \right)$

Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f \in \mathcal{C}^n$ sur I .

Son polynôme de Taylor d'ordre n en 0 est

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

(la partie régulière du DL).

②⑥ + démo :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t) dt \quad \text{per parties}$$

$$= f(0) + \left[\underbrace{-(x-t)}_0 f'(t) \right]_0^x + \int_0^x \underbrace{(x-t)}_0 f''(t) dt$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \int_0^x \underbrace{(x-t)}_0 f''(t) dt$$

$$= f(0) + f'(0) x + \left[-\frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt$$

$$= f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt$$

Plus général: Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

$$+ \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{term to bound}}$$

$$| \quad | \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} dt$$

pour $x > 0$

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

et pour $x < 0$

$$| \quad | \leq \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$\leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} dt$$

$$= \left[+ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \right]_x^0$$

$$= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

$$= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

640.11

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, 1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{ch}^{(k)}(0)}{k!} x^k - \operatorname{ch} x \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$