

Dérivation des fonctions numériques $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

Je me souviens

Dérivée

1. Comment définir la dérivée en a de $f: I \rightarrow \mathbb{K}$.
2. Équation de la tangente?
3. Une ~~autre définition~~ caractérisation de la dérivée?
4. Dérivée à droite? à gauche?
5. Lien entre dérivabilité et continuité?
6. Dérivée des fonctions $I \rightarrow \mathbb{C}$?
7. Quelle est la dérivée de $e^{(1+i)t}$?

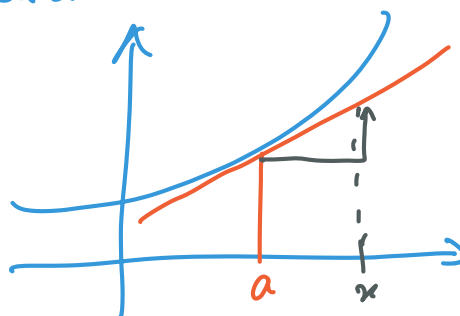
① f dérivable en a ssi $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie en 0

Dans ce cas $f'(a)$ est la limite.

② Éq de la tangente à Γ_f en a :

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



$$\textcircled{3} \quad f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } DL_1(a)$$

Dans ce cas :

$$\text{on écrit } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

$$\text{on a } \alpha_0 = f(a)$$

$$\alpha_1 = f'(a)$$

Rmq f deux fois dérivable en $a \not\leftrightarrow f$ admet un $DL_2(a)$

$$\textcircled{7} \quad \frac{d}{dt} \left(e^{(1+i)t} \right) = (1+i) e^{(1+i)t}$$

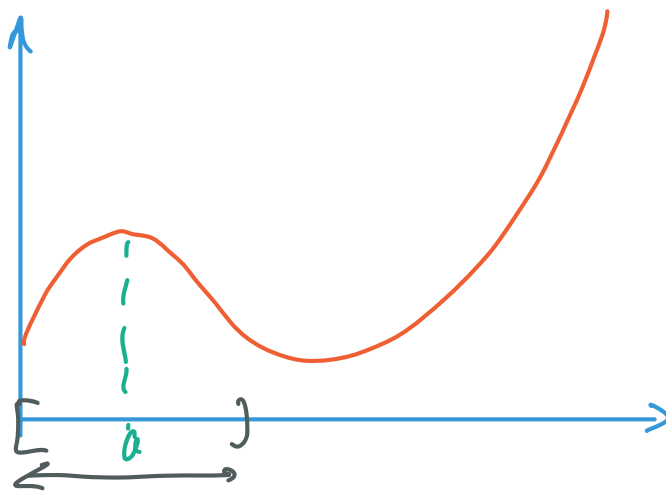
Théorème de Rolle

On ne parle ici que de fonctions réelles.

8. Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum global en a ».
9. Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum local en a ».
10. Énoncer le théorème faisant le lien entre extremum local et annulation de la dérivée.
11. Énoncer le théorème de Rolle.

$$\textcircled{8} \quad \forall t \in I \quad f(t) \leq f(a)$$

$$\textcircled{9} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I, \quad f(t) \leq f(a)$$



10 Théorème: (CN)

Si f définie sur I intervalle

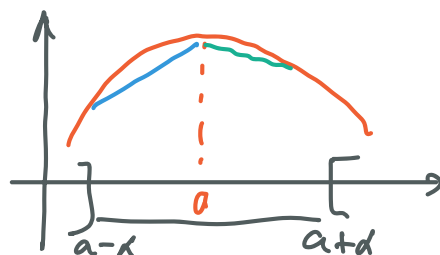
a n'est pas une extrémité de I (a intérieur à I)

f dérivable en a

f admet un extremum en a

Alors $f'(a) = 0$

Preuve:



car maximum

- $\exists \alpha > 0$ tq $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$

- Pour tout $h \in]0, \alpha[$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \quad \text{car max en } a$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$f'(a) \quad \text{car } f \text{ dérivable en } a.$$

Donc par passage à la limite dans les inég. l'org.

$$\underline{f'(a) \leq 0}$$

- Pour tout $h \in]-\alpha, 0[$

$$\leq 0 \rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \text{car max en } a \text{ et } h < 0$$

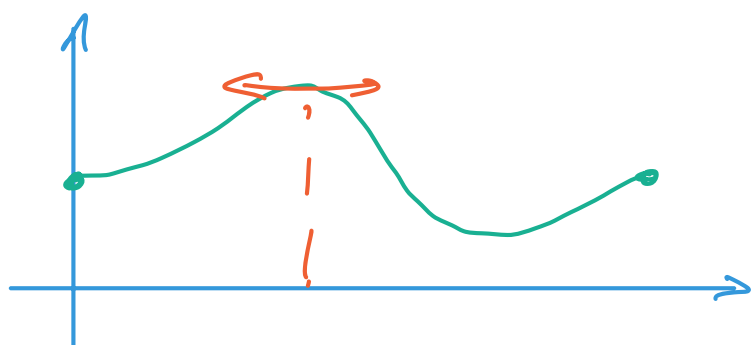
$$\swarrow h \rightarrow 0$$

$$f'(a) \quad \text{car } f \text{ dérivable en } a$$

Donc, à la limite $\underline{f'(a) \geq 0}$

- Ainsi $\underline{f'(a) = 0}$

(11) Th de Rolle.



Si $f(a) = f(b)$

f continue sur $[a, b]$

f dérivable sur $]a, b[$

alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

H_1 des bornes atteintes

H_2 principe de

Accroissements finis

12. Quelle est l'égalité des accroissements finis ?
13. Quelle est l'inégalité des accroissements finis ?
14. Il y a un lien avec le théorème fondamental de l'analyse ?
15. À quelle condition f dérivable est-elle constante ?
16. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle croissante ?
17. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle strictement croissante ?

13

Si f dérivable sur I intervalle
 f' bornée sur I

Alors: $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_{\infty} |x - y|$$

So f continue sur $[a, b]$

f dérivable sur $]a, b[$

$$\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$$

Alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

14

sur l'hyp f est C^1 sur I

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f'(t)| dt \end{aligned}$$

si $x < y$

$$\leq \int_x^y \|f'\|_\infty \, dr$$

$$= \|f'\|_\infty (y-x)$$

$$\text{donc si } x > y \qquad \leq \|f'\|_\infty (y-x)$$

(15) (16) (17)
 — Δ "intervalle"

Opérations sur les fonctions dérivables

18. $(\lambda f + \mu g)'(x) =$

19. $(f \times g)'(x) =$

20. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$

21. $(g \circ f)'(x) =$

22. $(f^{-1})'(x) =$

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{K}$$

(21) Si f dérivable sur I

g dérivable sur J

$$\forall x \in I, f(x) \in J \quad f(I) \subset J$$

f dérivable en a

g dérivable en $f(a)$

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Alors $g \circ f$ dérivable sur I

$$\text{et } \forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Physique:

$$x \xrightarrow{f} t \xrightarrow{g} u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

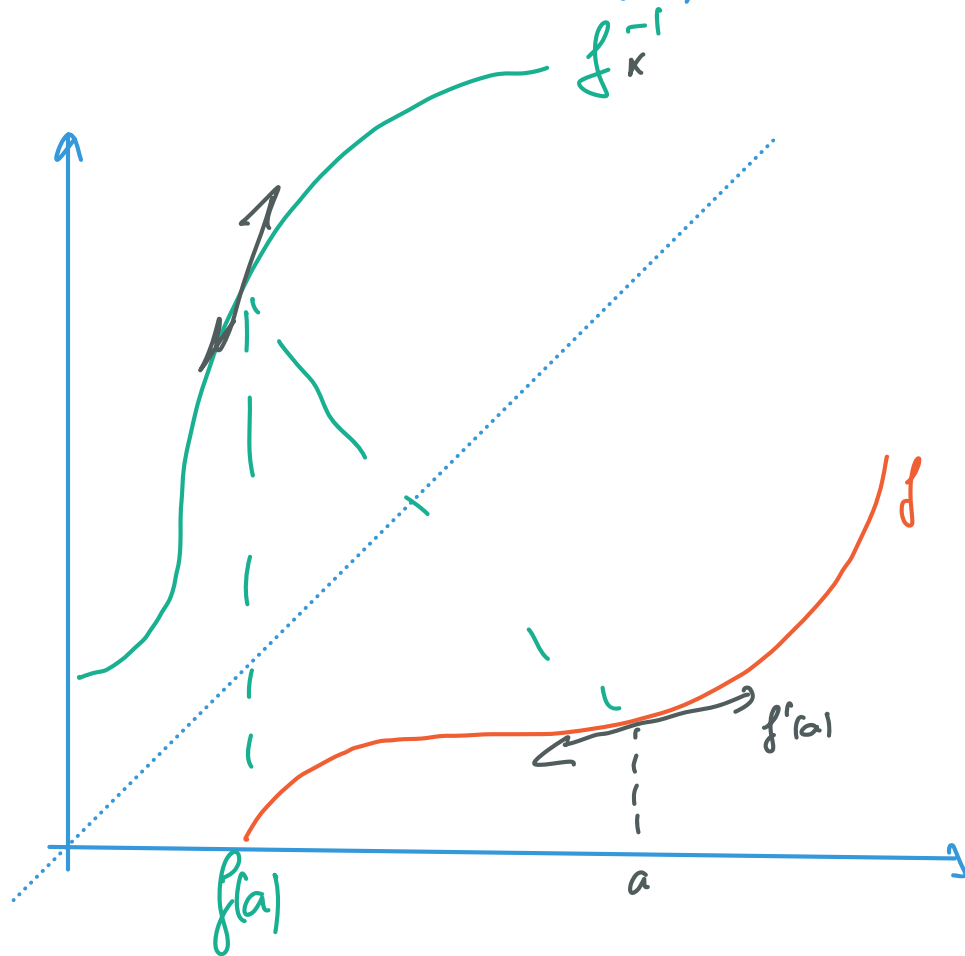
(22) Si f bijective $I \rightarrow J$

f dérivable en a

$$f'(a) \neq 0$$

Alors, f^{-1} dérivable en $f(a)$

$$\text{or } (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$



On reversing: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

23. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I »
24. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I », où $k \in \mathbb{K}$.
25. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I »
26. $(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x) =$
27. Énoncer la formule de Leibniz.
28. Comment démontrer la formule de Leibniz ?
29. Pour $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi : J \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$, que dire de $f \circ \phi$?

27

Si f et $g \in \mathcal{C}^n$ sur I

Alors $f \times g$ aussi et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(f \times g)' = f'g + fg'$$

$$(f \times g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(f \times g)^{(3)} =$$

Limite de la dérivée

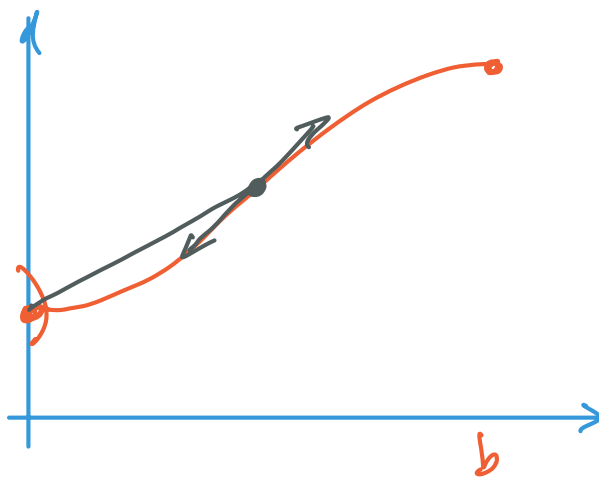
30. Énoncer le théorème limite de la dérivée.

31. Comment utiliser le résultat précédent pour prolonger à I de façon $\mathcal{C}^1$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$?

(30) Si

$$\begin{aligned} & f \text{ continue sur } [a, b] \\ & f \text{ ~~\mathcal{C}^1~~ dérivable sur }]a, b] \\ & f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{>} l \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors f est dérivable en a
et $f'(a) = l$.

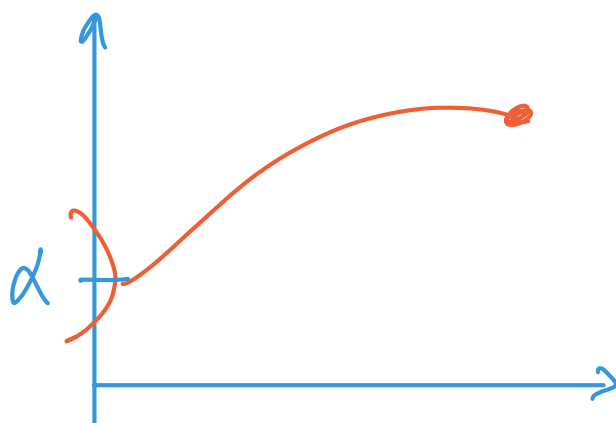


Cela ne s'applique qu'aux fct qui fondent sur $\mathcal{C}^1$ (car f' est automatiquement continue en a).

Théorème: Si $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$

$$f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{>} l \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{>} \alpha$$

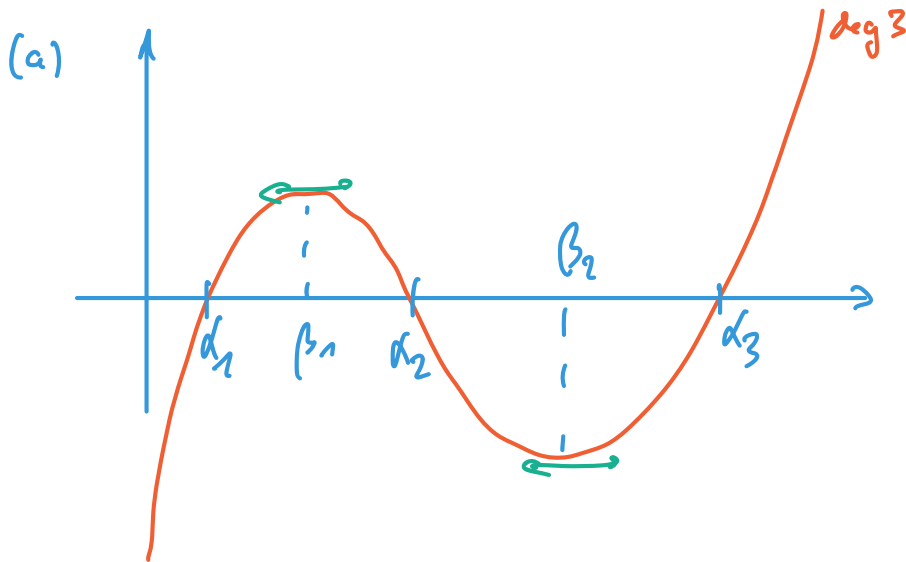
Alors on peut prolonger f en posant $f(a) = \alpha$
et f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.



Si P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, P' aussi

630.1

- (a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré ≥ 2 , scindé à racines simples, alors P' est aussi scindé à racines simples.
- (b) Le résultat est-il vrai si on suppose $P \in \mathbb{C}[X]$?
- (c) [*] Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme scindé, alors P' est aussi scindé.



On note $n = \deg(P)$

$\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ses racines (réelles) distinctes
ordonnées

Pour $k \in [1, n-1]$, $P(\alpha_k) = P(\alpha_{k+1}) (=0)$

et P est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par l'th de Rolle:

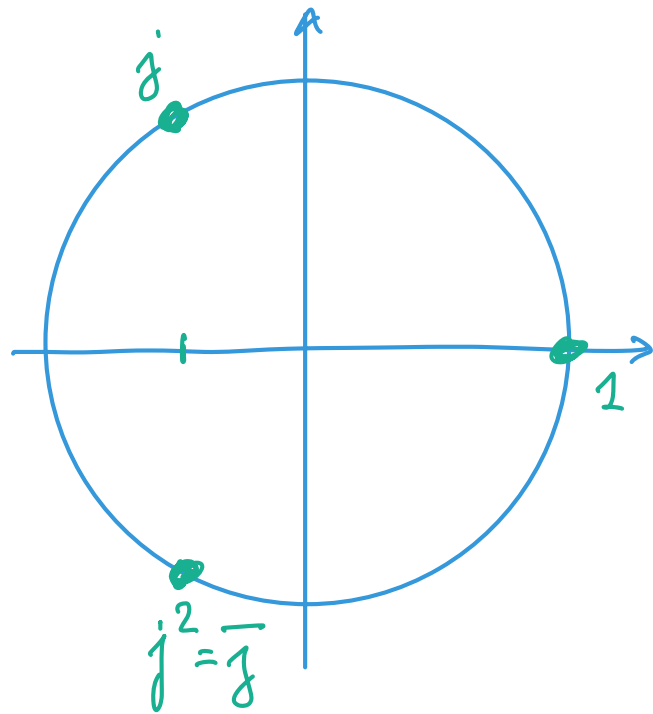
$$\exists \beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[\quad P'(\beta_k) = 0$$

On a trouvé $\beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n$

$n-1$ racines distinctes de P' donc P' scindé simple.

(b)

$$X^2 + X + 1$$
$$(X - j)(X - j^2)$$



$$(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$$

$$P = X^n - 1 \quad \text{Așinci are rădăcini simple}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i \frac{2k\pi}{n}})$$

$$P' = n X^{n-1} \quad \text{O rădăcină de multiplicitate (n-1)}$$

Așinci are rădăcini simple.

Un prolongement $\mathcal{C}^1$

630.2

Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.