

Pour ve: 540.3, 540.4

Pour le 7^e à rédiger pour : 530.16, 530.17
540.25, 540.26

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est continue sur I ,

alors :

- S est continue sur I .

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I , alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I .

Remarque. Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

heure: R du chap 530 = $(S_n)_n$

Attention: "Continue comme ~~la somme de fct continues~~
infinies"

Exemple On note $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- À x fixé, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (exponentielle, d'Alembert, ...)

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$.

- C'est uniforme ?

↳ C'est normal ?

f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\|f_n\|_\infty$ n'existe pas.

Zut.

$\hookrightarrow$ cv uniforme? $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cv} (n \rightarrow 0)$?
(difficile...)

La cv uniforme sur $\mathbb{R}$ entier n'est pas utile pour
le transfert de continuité.

$\hookrightarrow$ Étudier la cv normale sur tout $[-a, a] \subset]-\infty, +\infty[$

Pour $x \in [-a, a]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{|x|^n}{n!} \\ &\leq \frac{a^n}{n!} \quad \text{indép. de } x \\ &\quad \uparrow \text{ t.g d'une série exp. convergente} \end{aligned}$$

Donc $\sum f_n$ cv normalement sur tout $[-a, a] \subset]-\infty, +\infty[$

donc $\sum f_n$ cv uniformément sur $[-a, a]$

Les f_n sont continus sur $[-a, a]$

Donc par transfert de continuité,

exp est continue sur tout $[-a, a] \subset]-\infty, +\infty[$

donc continue sur $]-\infty, +\infty[$



2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a ,

alors :

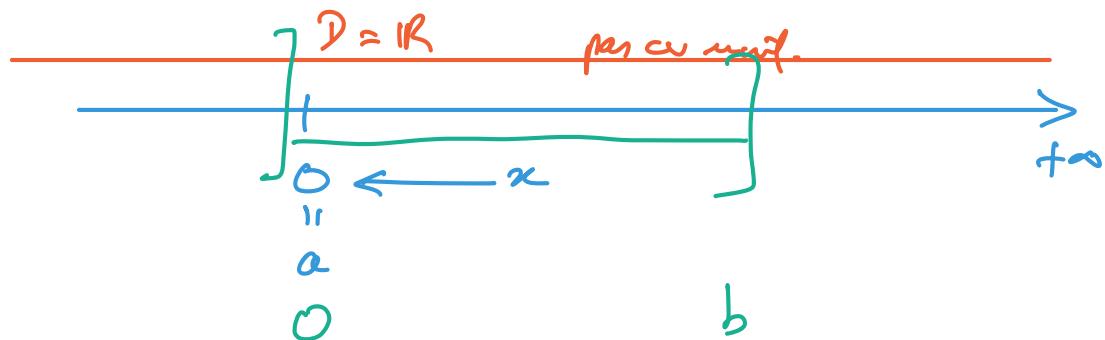
- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a ,
- cette limite est égale à ℓ .

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.



Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de $f(x)$.

• Étude de la cc simple

On note $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

Soit $x > 0$ fixe.

Rug: par de cc absolue. $|f_n(x)| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

$\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n \geq 0}$ est positive, décroissante, de limite nulle

donc par le th de séries alternées, $\sum f_n(x)$ cv.

Ainsi $\sum f_n$ cc simplement sur $]0, +\infty[$

• par de cc normale

• par le th de séries alternées

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right|$$

$$\leq \frac{1}{x+n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$[b, +\infty[$

donc $\sum f_n$ cc uniformément sur $]0, +\infty[$

c'est à a de th

• À n fixé, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

(parfois, discuter selon la valeur de n)

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{c'est le th de th}$$

Par le th de la double limite :

* $\sum 0$ est convergent

$$* f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $] -1, 1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur I ,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- pour tout x : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f'_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Remarque. Étudier les variations de la somme f d'une série de fonction, c'est d'abord comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$, ce qui peut souvent se faire en comparant les « sommandes », sans faire appel au théorème de classe C^1 , lourd à mettre en œuvre.

1

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est monotone sur $\mathbb{R}$.

"si x augmente, $f(x)$ augmente" donc $f \nearrow$.

Soit $x \leq y$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x^n}{n!} \leq \frac{y^n}{n!}$

donc par somme, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$

ou $e^x \leq e^y$

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

• cu simple :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$

$$f_n(x) = \frac{O(1)}{n^2}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car } \sum \frac{1}{n^2} \text{ cu absolument}$$

donc $\sum f_n(x)$ cu absolument

donc $\sum f_n$ cu simplement sur $\mathbb{R}$

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$

• les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} (-n 2x) e^{-nx^2}$$

$$= \frac{-2x}{n} e^{-nx^2}$$

• Étude de la uniformité (normale?) de $\sum f_n'$

Idee 1 Pour $n \in [a, b] \subset]0, +\infty[$

$$|f'_n(x)| = \frac{2|x|}{n} e^{-nx^2} \leq \frac{2b}{n} e^{-na^2} \quad \text{indépendant de } x$$

$$\uparrow = o((e^{na^2})^n)$$

hg série abs. convergente

$$\text{Donc } \sum \|f'_n\|_{\infty}^{[a,b]} \text{ converge}$$

dans $\sum f'_n$ au nombre, donc uniformément,

sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Ainsi par le th de classe $\mathcal{C}^1$, S est $\mathcal{C}^1$

sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$, donc S est $\mathcal{C}^1$

sur $]0, +\infty[$.

De même sur $] -\infty, 0[$

On n'a pas répondu à la question.

Idee 2

$$|f'_n(x)| = \frac{2|x|}{n} e^{-nx^2}$$

"cloche"

On note $\varphi: x \mapsto x e^{-nx^2}$

$$\varphi'(x) = e^{-nx^2} + x(-n2x)e^{-nx^2}$$

$$= e^{-un^2} (1 - 2ux^2)$$

$$= -2u e^{-un^2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2u}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2u}}\right)$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2u}}$	$+\infty$
φ'_n		+	0
φ	0		0

$\frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-n \frac{1}{2u}} = \frac{1}{\sqrt{2eu}}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{R} \quad |f'_n(n)| = \frac{2}{n} |\varphi(n)|$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{2e}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{indep. de } x \quad \text{😊}$$

tg série de Riemann cv.

Donc $\sum f'_n$ cv normalement, donc uniformément
sur $\mathbb{R}$

Ainsi S est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$S'(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2u}{n} e^{-un^2}$$

Exemple: Montrer que $\exp$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer $\exp'$

On note $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

- $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$

- les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{n!} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$$

$$f_0'(x) = 0$$

- Pour $x \in [-a, a] \subset]-a, +\infty[$,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{indép. de } x$$

t.g. série convergente

donc $\sum f_n'$ cv normalement, donc unif. sur $[-a, a]$

Ainsi, par le th de classe $\mathcal{C}^1$,

$\exp$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-a, a] \subset]-a, +\infty[$,

donc $\exp$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \end{aligned}$$

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2 - n^2}$.

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geq 1$.

pour montrer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^k$:

* les f_n sont $\mathcal{C}^k$

* $\sum f_n$ cv simplement

* $\sum f_n'$ cv simplement
⋮

* $\sum f_n^{(k-1)}$ cv simplement

* $\sum f_n^{(k)}$ cv uniformément.

On conclut : S est $\mathcal{C}^k$, et on recommence à l'étape.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

540.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

On note $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

• $\sum f_n$ cv simplement sur $]1, +\infty[$

(série de Riemann)

• $f_n(x) = e^{-x \ln n}$ donc f_n est C^∞ sur $]1, +\infty[$

et $f'_n(x) = -\ln n e^{-x \ln n}$

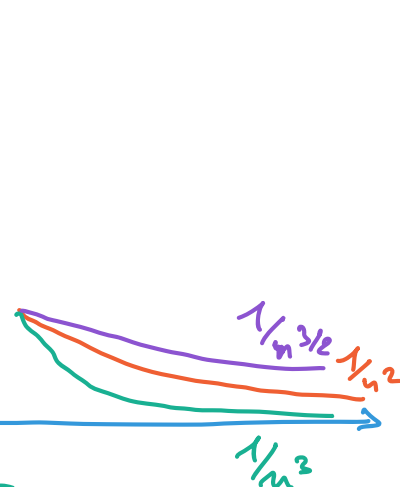
$$= \frac{-\ln n}{n^x}$$

• Montrer que $\sum f'_n$ cv uniformément sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 1$

$$|f'_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x}$$

$$\leq \frac{\ln n}{n} \text{ indep de } x$$

Zut! la série diverge.



$$\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n} \leq e^{-x \ln 2} \text{ pour } n \geq 2$$

Pour $n \in [a, +\infty[\subset]1, +\infty[$

$$|f'_n(n)| = \frac{\ln n}{n^a}$$

$$\leq \frac{\ln n}{n^a} \quad \text{indép. de } n$$



Au vois de $n \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln n}{n^a} = \frac{o(n^{\frac{a-1}{2}})}{n^a}$

$$= o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)$$

où $\frac{a+1}{2} > 1$, donc $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge absolument

Bref: $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément
sur tout $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$

Par le th de classe $\mathcal{C}^1$, ζ est $\mathcal{C}^1$ sur tout

$[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$, donc ζ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

$$\text{et } \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$$

Montrons que $\sum$ est $\mathcal{C}^\infty$.

• $\sum f_n$ cv simplement sur $]a, +\infty[$

• $\forall k \geq 1, \quad f_n^{(k)} = e^{-n \ln n}$

f_n est $\mathcal{C}^k$ et $f_n^{(k)}(n) = \frac{(-\ln n)^k}{n}$ par récurrence

• Pour $x \in [a, +\infty[\subset]1, +\infty[, \text{ pour } k \geq 1$

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x)| &= \frac{(\ln n)^k}{n^x} \\ &\leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} \quad \text{indép. de } x \end{aligned}$$

stop

où, au vis. de $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{(\ln n)^k}{n^a} &= \frac{o\left(n^{\frac{a-1}{2}}\right)}{n^a} \\ &= o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right) \end{aligned}$$

donc $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ cv.

Donc $\sum f_n^{(k)}$ cv normalement, donc unif.

sur tout $[a, +\infty[$ et $]1, +\infty[$

Ainsi $\sum$ est $\mathcal{C}^k$ pour tout k sur tout $[a, +\infty[$ et $]1, +\infty[$
et donc $\sum$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

540.5

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

- (a) Montrer que g est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
(b) [*] Est-ce que g est dérivable en 1 ?

