

Pour jé 540.15, 540.16

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce paragraphe un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geq n_0$.
- Le premier point permet de garantir l'existence de $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)|, x \in I\}$
- Le second point est la convergence d'une série **numérique**.
- La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.

$\sum f_n$ cv normalement ssi $\sum \|f_n\|_\infty$ cv

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$.

S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, |f_n(x)| \leq \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente, alors $\sum f_n$ converge normalement.

Preuve

On suppose $\forall n \quad |f_n(x)| \leq \alpha_n$ indep. de x

$$\text{donc} \quad 0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$$

↑ t.g. série convergente

donc par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ cv.

Remarque : c'est une équivalence, avec $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$

Inquiétude

530

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \dots \\ &\leq \dots \quad \text{indép de } x \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cv} f \quad \xrightarrow{\quad} 0$$

540

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \dots \\ &\leq \dots \quad \text{indép de } x \\ &\quad \uparrow \text{ t.g. d'une série cv.} \end{aligned}$$

Donc $\sum f_n$ cv normalment.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

5. $f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$

À n fixé

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

indép de x !?

↑ t.g. série convergente

~~donc $\sum f_n(x)$ converge (absolument)~~

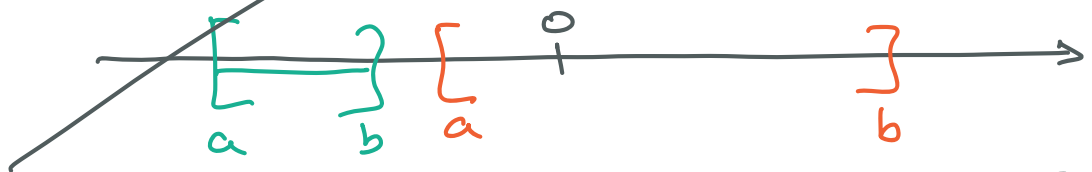
donc $\sum f_n$ cu ~~simple~~ sur $\mathbb{R}$.
uniformement

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Notons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

Pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!}$$



↙ Tout segment est inclus dans $[-a, a]$

Pour $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\leq \frac{a^n}{n!} \quad \text{indép de } x.$$

↑
t.g. série exponentielle cv.

Donc $\sum f_n$ cv normale sur tout $[-a, a] \subset \mathbb{R}$

Par de cv normale sur $\mathbb{R}$, f_n n'est même pas bornée.

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

• Convergence simple ?

Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

* si $x \in [0, 1[$

$$f_n(x) = o(x^n)$$

↑ tg série géom convergente.

donc $\sum f_n(x)$ converge **absolument**

* si $x = 1$

$$f_n(1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \quad \text{tg série harmonique alternée}$$

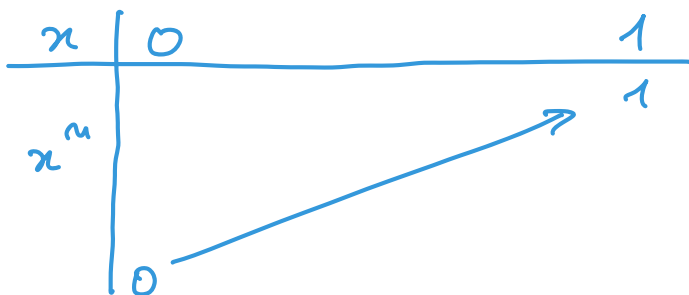
qui est convergente. (**pas absolue**)

* si $x \in [0, 1]$

$\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle

donc $\sum f_n(x)$ cv par le th des séries alternées
(**pas absolument**)

• Convergence normale ? (est-ce que $\sum \|f_n\|_\infty$ cv ?)



$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$$

$$\text{donc } \|f_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{n}$$

donc $\sum f_n$ ne cr pas uniformément
(la série harmonique diverge)

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I .

Remarque. On peut quantifier la définition par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sum f_n \text{ converge uniformément } &\Leftrightarrow (S_n)_n \text{ converge uniformément } \\ &\quad \text{S40} \qquad \qquad \qquad \text{S30} \quad \downarrow \\ \sum f_n \text{ converge simplement } &\Leftrightarrow (S_n)_n \text{ converge simplement.} \end{aligned}$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

$$\text{et} \begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Preuve:

$\Rightarrow$ On suppose $\sum f_n$ converge simplement sur I .

On note S sa somme : $\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

On suppose que $(R_n)_n$ converge unif vers 0 ($n \rightarrow \infty$) sur I

Pour $x \in I$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$$= |R_n(x)|$$

$$\leq \|R_n\|_{\infty}^I \quad \text{indép. de } x$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\Rightarrow$ On suppose $\sum f_n$ cv uniformément sur I .

On note S sa somme.

• $\sum f_n$ cv simplement.

• Pour $x \in I$

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)|$$

$$\leq \|S_n - S\|_{\infty}^I \quad \text{indép. de } x$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} (x \mapsto 0)$

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

$$CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$$

ie $\sum \|f_n\|_\infty$ cv

Preuve: Soit $\sum f_n$ qui converge $\swarrow$ normalement sur I .

- Montrer que $\sum f_n$ cv simplement

$$\text{Soit } x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

$\nwarrow$ t.g. série cv

kr majorat, $\sum f_n(x)$ cv absolument

Donc $\sum f_n$ cv simplement (absolument) sur I .

- Montrer que $(R_n)_n$ cv uniform vers 0

Pour $x \in I$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$\swarrow$ car oui existe car $\sum f_k(x)$ cv

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$$

$\swarrow$ oui oui! car la cv est absolue

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

$\swarrow$ oui oui, car $\sum \|f_k\|_\infty$ cv

indép. de x

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

comme reste d'une série numérique cv.

Ainsi, $\sum f_n$ cv uniformément.

Remarque

Pour montrer la cv uniforme de $\sum f_n$:

idée 1 : on essaye de montrer la cv normale.

idée 2 : a-t-on besoin de la cv uniforme
sur tout l'intervalle, ou localement ?

→ cv normale sur $[a, b]$...

idée 3 : on montre $\left| \sum f_n \right|$ cv simplement
 $R_n \xrightarrow{cv} 0$

↑
toujours délicat.

1.2 Convergence uniforme

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I , et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I .

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $(x \mapsto 0)$ sur I .

Remarque. Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au th. des séries alternées.

540.10

INP 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\begin{aligned} & \left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A \right) \end{aligned}$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
 $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

① . Étude de la ce simple

Soit $x \in A$.

La série numérique $\sum f_n(x)$ converge
donc ne diverge pas grossièrement,
donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
Donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} (x \mapsto 0)$

$$f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x) - S(x) = 0$$

série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$

$$0 \leq f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \quad \begin{matrix} e^{-\ln n} & e^{-2\ln n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n^2} \end{matrix}$$

$$\leq n n^2 e^{-3\ln n}$$

lorsque $x\sqrt{n} \geq 3\ln n$

vrai au voisinage de $n \rightarrow +\infty$
voisinage qui dépend de x

$$= n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{Ag série convergente.}$$

Donc $\sum f_n(x)$ cv pour $x \geq 0$

Donc $\sum f_n$ cv simplement sur $[0, +\infty[$

• Étude de la cv uniforme de $\sum f_n$

Montrons que $(f_n)_n$ ne cv pas unif. vers $(x \mapsto 0)$

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}.$$

idée 1: cloche



↳ balayage de variabilité, $\|f_n\|_\infty = \dots$

idée 2:

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 e^{-1}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc la cv n'est pas uniforme: $f_n \not\xrightarrow{cv} (x \mapsto 0)$
donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$, $I = [0, 1]$.

• Zut! $\|f_n\|_{\infty}^{[0,1]} = \frac{1}{n}$

il n'y a pas de normale.

• On a déjà vu que $\sum f_n$ cv simplement sur $[0, 1]$

• Étude de la cv uniforme:

Pour $x \in [0, 1]$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right|$$

$$R_{-1}(n) = S(n)$$

$$\leq \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

à x fixé
 $\left(\frac{x^k}{k}\right)_k$ est positif,
décroissant, de
limite nulle.
Th. des séries alternées

Donc $\sum f_n$ cv uniformément sur $[0, 1]$

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

2. $f_n(x) = x e^{-n x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

- Étude de la cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x e^{-n x^2} \\ &= x (e^{-x^2})^n \quad \text{géométrique} \end{aligned}$$

donc $\sum f_n(x)$ cv pour $x \neq 0$ (car $e^{-x^2} < 1$)

$\sum f_n(0)$ cv car $f_n(0) = 0$

- cv normale

$$\|f_n\|_\infty \geq \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1}$$

↑ tg série divergente

Enr, la cv n'est pas normale.

- cv uniforme.

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-k x^2} \right| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x e^{-(n+1)x^2} \frac{1}{1 - e^{-x^2}} & \text{c'est géométrique} \end{cases} \end{aligned}$$

$$R_n(x_n)$$

$$\|R_{n+1}\|_{\infty} \geq R_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} \cdot n$$

$$= \sqrt{n} e^{-1}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

donc $(R_n)_n$ ne cv pas uniformément.

donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément.

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

3. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

• cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\left(\frac{1}{n+x^2}\right)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle.

Donc par le th des séries alternées,

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ converge}$$

ie $\sum f_n$ converge simplement.

• cv uniforme

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k+x^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1+x^2}$$

th séries alternées

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la cv est uniforme.

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est continue sur I ,

alors :

- S est continue sur I .

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I , alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I .

Remarque. Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a ,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a ,
- cette limite est égale à ℓ .

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de $f(x)$.

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $] -1, 1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.

