

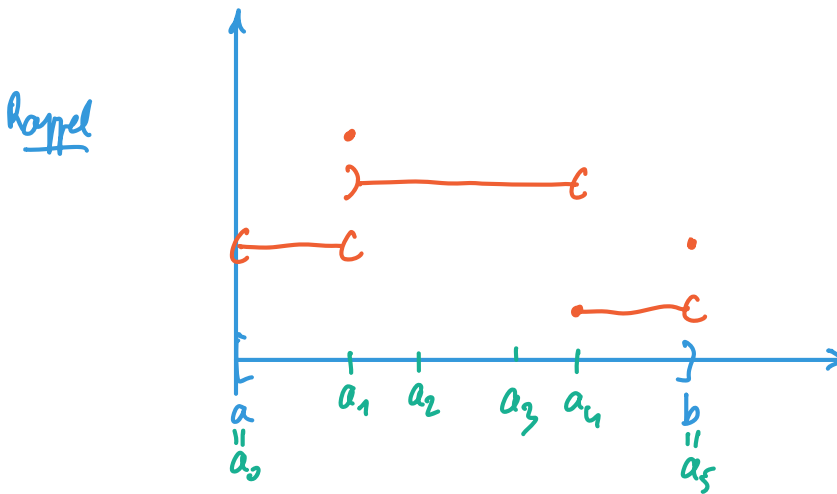
low me. 530.12, 530.13, 530.20, 530.22

8 Théorèmes d'approximation uniforme

8.1 Approximation par des fonctions en escalier

Théorème.

Toute fonction continue (par morceaux) sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.



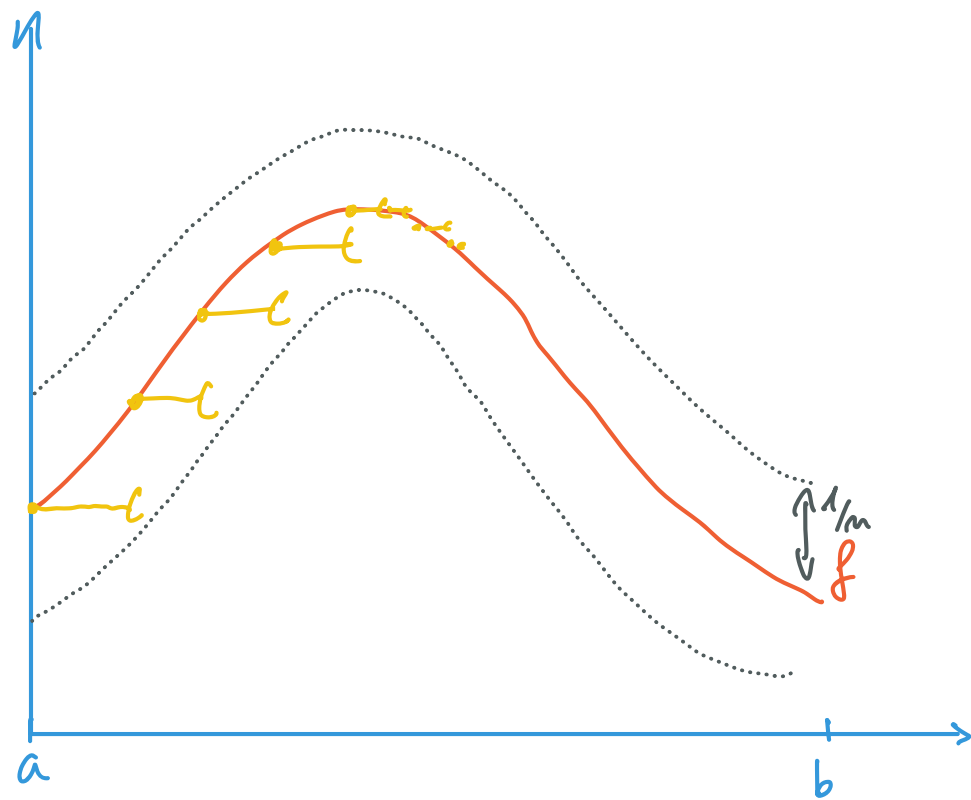
$\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ subdivision du segment $[a, b]$

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

f en escalier sur $[a, b]$

on $\exists \sigma = (a_0 \dots a_n)$ subdivisⁿ de $[a, b]$ $\frac{1}{\epsilon}$

$\forall i$ $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ constante



On va construire une fct g_n en escalier

"proche de f à $\frac{1}{n}$ près" ie $\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$

Par le th de Heine, f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est uniformément continue. Par def avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$:

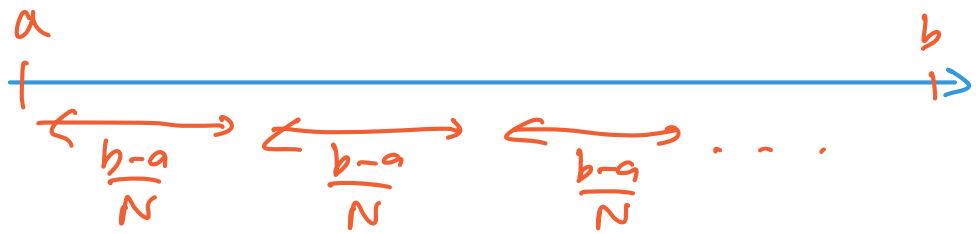
$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

le même α sur tout le segment.

Définissons N tq $\frac{b-a}{N} \leq \alpha$

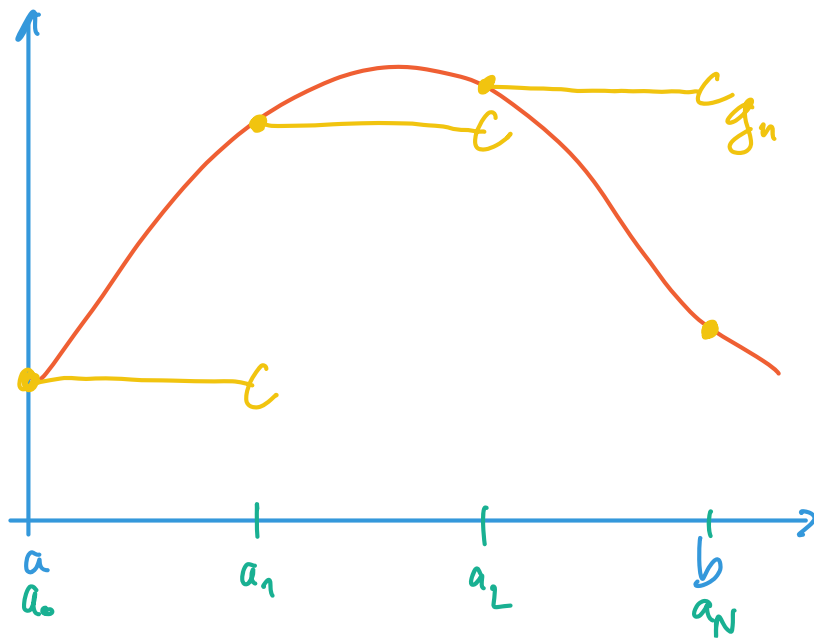
on pose $N = \left\lfloor \frac{b-a}{\alpha} \right\rfloor + 1$



On pose $a_i = a + i \frac{b-a}{N} \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}$
 une subdivision de $[a, b]$ à pas régulier.

On pose: $g_n : x \mapsto f(a_i) \quad \text{si } x \in [a_i, a_{i+1}[$
 $\forall i \in \{0, \dots, N\}$
 et $g_n(b) = f(b)$

(voir aussi somme de Riemann / méthode des rectangles).



Pour tout $x \in [a, b)$ (sauf b)

$\exists i \leq N$ $x \in [a_i, a_{i+1}[$ et $g_n(x) = f(a_i)$

donc $|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(a_i)|$

$$\leq \frac{1}{n} \quad \text{car } |x - a_i| \leq \alpha$$

↑ valable aussi pour b

indép de x

$$\left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} 0 \\ u \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

$$\text{donc } \|f - g_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$$

8.2 Approximation par des fonctions polynomiales

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Remarque. On parle ici de fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'hypothèse de continuité est importante, celle de segment aussi.

Soit f continue sur $[a, b]$ segment.

Alors $\exists (P_n)_n$ suite de polynômes tq

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cu}} f \quad (\text{cu unif sur } [a, b])$$

530.8

INP 48

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
 - (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

530.3

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

$$\begin{aligned}\| \varphi \|_{\infty}^I &= \sup_{x \in I} |\varphi(x)| \\ &= \sup_I |\varphi|\end{aligned}$$

~~$$\| \varphi(x) \|_{\infty}^I$$~~

2a) Majorons:

$$\forall x \in [a, b]$$

$$|p_n(x)f(x) - f^2(x)| = |f(x)| |p_n(x) - f(x)|$$

$$\leq |f(x)| \|p_n - f\|_{\infty}$$

$$\leq \|f\|_{\infty} \|p_n - f\|_{\infty}$$

indép de x

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

f étant continue sur le segment $[a, b]$,
sa norme infinie existe (théorème de Weierstrass)

2b) On calcule:

$$\left| \int_0^1 p_n(t) f(t) dt - \int_0^1 f^2(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 p_n(t) f(t) - f^2(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |p_n(t) - f(t)| |f(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \|p_n - f\|_\infty \|f\|_\infty dt \\
&= \|p_n - f\|_\infty \|f\|_\infty \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

2c) Ici n est fixé.

p_n est un polynôme, donc $\exists a_0, \dots, a_p$ tq

$$p_n = \sum_{k=0}^p a_k X^k$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_n(t) f(t) dt &= \sum_{k=0}^p a_k \underbrace{\int_0^1 t^k f(t) dt}_{=0 \text{ par leyer}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\textcircled{3} & \int_0^1 p_n(t) f(t) dt & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt \\
& \parallel & \\
& 0 & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{array}$$

Par unicité de la limite, $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$

Intégrale nulle d'une fonction continue et positive
 donc $\forall t \in [0,1] \quad f(t) = 0$.

530.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x(1 + e^{-nx})$$

- (a) Sur quelle partie D de $\mathbb{R}$ la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement ?
 (b) La convergence est-elle uniforme sur D ?
 (c) Déterminer la limite, pour $n \rightarrow +\infty$, de $\int_0^1 f_n(t) dt$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

• Si $x > 0$

$$f_n(x) = x(1 + e^{-nx})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x(1 + 0) = x$$

• Si $x = 0$

$$f_n(x) = 0$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

• Si $x < 0$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

La suite $(f_n)_n$ cv simplement sur $D = [0, +\infty[$ vers $\underbrace{(x \mapsto x)}_f$.

(b) Pour $x \in [0, +\infty[$:

$$|f_n(x) - x| = x e^{-nx}$$

$\uparrow$
 note $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^{-nx} + x(-n)e^{-nx} \\ &= ne^{-nx} \left(\frac{1}{n} - x \right)\end{aligned}$$

x	0	$1/n$	$+\infty$
φ'		+	0
φ	0		0

$\nwarrow x \mapsto n$

$$\begin{aligned}\text{donc } \|f_n - f\|_\infty &= \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} e^{-1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

donc $(f_n)_n$ converge vers f sur $[0, +\infty[$.

(c) (R1) $\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t + t e^{-nt} dt$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \underbrace{t}_{\downarrow} \underbrace{e^{-nt}}_{\uparrow} dt$$

par parties

$$= \frac{1}{2} + \left[t \frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{-nt}}{-n} dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

(72) th.: Si $(f_n)_n$ cu uniformément vers f sur $[a, b]$
seguent., alors $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Preuve:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| \\ & \leq \|f_n - f\|_{\infty}^{[a, b]} (b-a) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Séries de fonctions numériques

$$(u_n)_n \text{ c.v.} \Leftrightarrow \sum u_{n+1} - u_n \text{ c.v.}$$

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ? Quel est le lien entre suite et série ?
2. Quelles sont les principales techniques d'étude d'une série numérique à termes positifs ? alternées ? de signe quelconque ?
3. Qu'est-ce que la convergence simple d'une suite de fonctions ? la convergence uniforme ?
4. Comment assurer la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions ? et la dérivabilité ?

① Comparaison asymptotique des t.g. (c.v. absolue)
 y compris technique d'éclatement

② Comparaison à une intégrale (relève aux sous-partielles)

③ Transformation d'Abel (relève aux sous-partielles)

Th des séries alternées.

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{aligned} S : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I . Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J , appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 520 : on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'une série numérique connue (Riemann, géométrique, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.

Remarque.

- La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.

- En cas de convergence simple sur I , on note :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I .

- On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geq n_0$.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

1. $f_n(x) = x^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$\sum x^n$ est une série géométrique

qui converge ssi $|x| < 1$

donc $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ définie sur $] -1, 1[$

Ici $\forall x \in] -1, 1[\quad S(x) = 1 \cdot \frac{1}{1-x}$

Il est rare de savoir exprimer $S(x)$.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

2. $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixe.

$$\sum \frac{1}{n^x} \text{ converge \underline{ssi} } x > 1$$

(exemple de séries de Riemann)

On définit

$$\zeta :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

"Fonction zeta de Riemann".

a b c $\alpha \beta \gamma \varphi \psi \theta \zeta \xi \sigma \lambda$

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

$$3. f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

1^{er} cas $x \neq 0$

On voit de $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n} (e^{-x^2})^n \\ &= o((e^{-x^2})^n) \end{aligned}$$

↑ t.g. série géom. convergente
ab

donc $\sum f_n(x)$ cv

2^e cas $x = 0$

$$f_n(0) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

CCP : $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}^*$

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

4. $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n}$

Soit x fixé

• Si $x \neq 0$ $f_n(x) = o\left((e^{-x^2})^n\right)$

donc $\sum f_n(x)$ converge absolument

par comparaison à une série géométrique

• Si $x = 0$ $f_n(0) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$\sum f_n(0)$ est (série harmonique alternée)

$\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

5. $f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$

À x fixé

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \swarrow \text{indép de } x \text{ !?}$$

↑ t.g. série convergente

donc $\sum f_n(x)$ converge (absolument)

donc $\sum f_n$ c.v. simplement sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

6. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$

