

4.1 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I ,
alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B .

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f et g sur I et si
 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur I .

4.2 Convergence uniforme sur tout segment

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I : \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge vers f uniformément sur tout segment de I** si et seulement si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $(f_n|_{[a, b]})_n$ converge uniformément vers $f|_{[a, b]}$ sur $[a, b]$.

Exemple. Étudier la convergence uniforme sur tout segment des trois suites de fonctions :

1. $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$

2. $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$

3. $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

Remarque. La convergence uniforme sur tout segment de I n'est pas équivalente à la convergence uniforme sur I . C'est une notion plus faible, mais on verra qu'elle pourra suffire à transmettre à la limite certaines propriétés.

Exemple.

1. Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégral pour ~~montrer~~ ^{adairis} : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$.
2. Étudier la ~~convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$~~ de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Alors la limite de $(f_n)_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

• Étude de la cs simple :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé

On considère de $n \rightarrow +\infty$

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$= e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$$

$$= e^{n \left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{x + o(1)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

Donc $f_n \xrightarrow{CS} \exp$

• Convergence unif ?

$\exp - f_n$ non bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_n(x) = o(e^x)$

donc $\|\exp - f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*}$ n'existe pas.

• Pour $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
|e^x - f_n(x)| &= |e^x - e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}| \\
&\leq e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} \leq e^{n \cdot \frac{x}{n}} \quad \text{par (a)} \\
&= e^x \\
&= e^x - e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} \\
&\leq e^x - e^{n(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2})} \quad \text{par (a)} \\
&= e^x - e^{x - \frac{x^2}{2n}} \\
&= e^x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2n}}\right) \\
&\leq e^b \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2n}}\right) \\
&\leq e^b \left(1 - e^{-\frac{b^2}{2n}}\right) \quad \text{indép de } x \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Donc $(f_n)_n$ converge unif. vers exp sur $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Or les f_n sont continues (polynomiales)

donc, par transfert de continuité, la limite exp

est continue sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

donc sur $]0, +\infty[$ (caractère local de la continuité)

Rmq $(f_n)_n$ est une suite de polynômes qui approxime uniformément la fct continue exp sur $[a, b]$.

5 Transfert de continuité par convergence uniforme

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I .

Si :

- pour tout n , f_n est continue sur I ,
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f ,

alors :

- f est continue sur I .

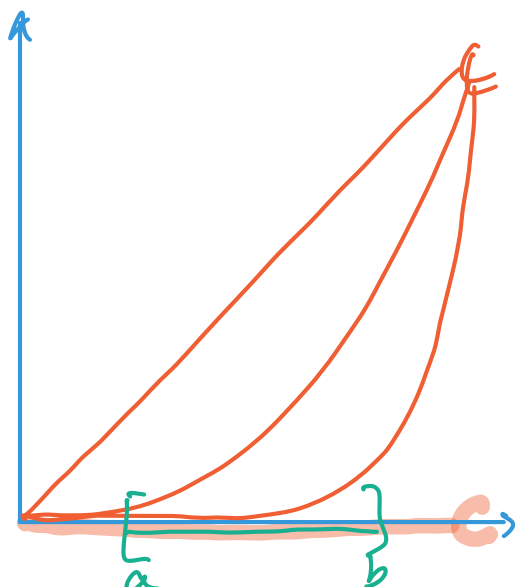
Remarque.

- La convergence simple ne suffit pas pour justifier la continuité de f , comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$.
- La continuité des f_n et de f ne suffit pas à justifier la convergence uniforme, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^2 x(1 - x^2)^n$.

Corollaire. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f , que les f_n sont continues sur I mais que f n'est pas continue sur I , alors la convergence n'est pas uniforme sur I .

Raisonnement classique. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f , que les f_n sont continues sur I et qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I , alors f est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I .

Remarque. Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.



$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n$$

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0$$

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f$ et la cv n'est pas uniforme. ($x_n = 1 - \frac{1}{n}$)

Même l'on peut appliquer le th pour obtenir la continuité de f .

Soit $[a, b] \subset [0, 1]$

$$\forall n \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| = x^n$$

$$\leq b^n \quad \text{indép. de } x \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

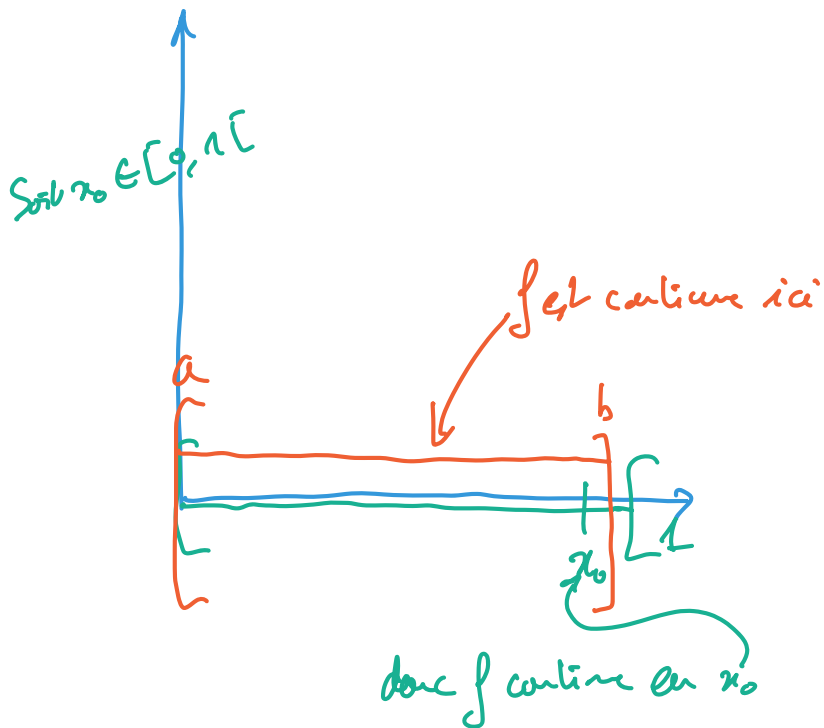
donc $(f_n)_n$ cv unif vers f sur $[a, b]$

Or les f_n sont continues

donc par transfert de continuité,

f est continue sur tout $[a, b] \subset [0, 1[$

donc f est continue sur $[0, 1[$



Remarque la cv de $(f_n)_n$ vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1[$

puisque $(f_n)_n$ cv unif vers f sur tout $[a, b] \subset [0, 1[$

6 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et a un point de I ou une extrémité éventuellement infinie de I .

Si :

- pour tout n , $f_n(x)$ admet une limite finie ℓ_n lorsque $x \rightarrow a$,
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I ,

alors :

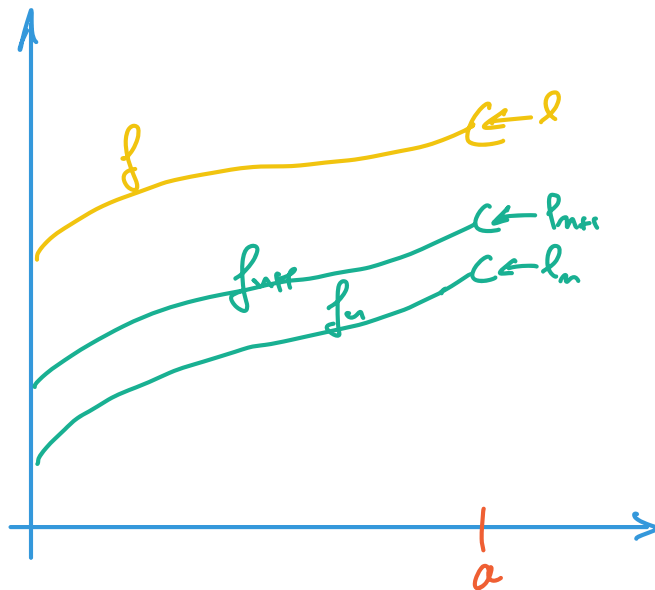
- la suite $(\ell_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,
- $f(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow a$,
- cette limite est égale à ℓ .

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.



Exemple. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

1. Déterminer la limite de f_n en 0.
2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$.

1- n est fixé. Au voisinage de $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}} \\ &= \frac{nx^2 (1 + o(1))}{1 - (1 - x^2 + o(x^2))} \end{aligned}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} nx$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} n \quad \text{noté } l_n$$

2. Étude de la c.s. simple.

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé.

Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } nx = o(e^{nx})$$

$$\text{Donc } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} (x \mapsto 0) \quad \text{noté } f$$

3. • On a $f(n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$

• et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \dots \xrightarrow{\text{différentielle}}$

donc la cv n'est pas uniforme

sur $]0, +\infty[$. (double limite)

4. Cv uniforme sur $[a, +\infty[$ et $]0, +\infty[$:

Pour $x \in [a, +\infty[$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

$$\leq \frac{n x^2 e^{-na}}{1 - e^{-a^2}}$$

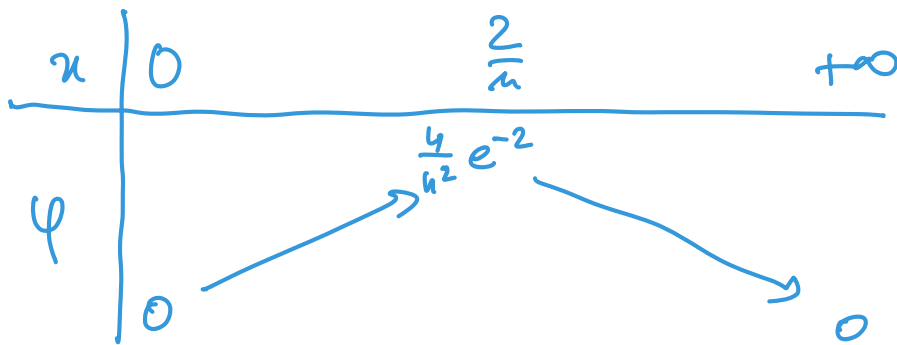
$$\leq \frac{n \boxed{x^2 e^{-nx}}}{1 - e^{-a^2}}$$



On pose $\varphi(x) = x^2 e^{-nx}$

$$\varphi'(x) = 2x e^{-nx} + x^2 (-n) e^{-nx}$$

$$= e^{-nx} x(-n) \left(x - \frac{2}{n} \right)$$



Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n \cdot \frac{4}{n^2} e^{-2}}{1 - e^{-a^2}}$ indép de x

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty}^{[a, +\infty[} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc la cv est uniforme sur tout $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$

$$(f_n)_n$$

$$\sum f_n$$

7 Dérivation

7.1 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions. (Soit utile au chap 560)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I intervalle.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f ,
- la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g ,

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- $f' = g$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $(f_n)_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $(f'_n)_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemple. Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Preuve: Soit $a \in I$, pour $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad \text{car } f_n \in \mathcal{C}^1$$

On veut passer à la limite pour $n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \\ f_n(a) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) \end{aligned}$$

par ce simple de $(f'_n)_n$

• Montrer que $\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^x f'_n(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\
 &\leq \int_a^x \underbrace{|f'_n(t) - g(t)|}_{\text{pour } x \geq a} dt \\
 &\leq \int_a^x \|f'_n - g\|_{\infty}^I dt \\
 &= (x-a) \|f'_n - g\|_{\infty}^I \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

de même si $x \leq a$.

Pour: $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad (*)$

or: $f'_n \xrightarrow{cu} g$ et les f'_n sont continues
donc par transfert de continuité, g continue

et donc $(*)$ donne: f est C^1 et $f'(x) = g(x) \forall x$

Couplet du résultat

Que $(f_n)_n$ converge vers f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Pour $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f(x)| \\ &= \left| f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt - f(a) - \int_a^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - f'(t)| dt \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + (b-a) \|f_n' - \cancel{f'}\|_{\infty}^{\text{I}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{indépendant de } x \end{aligned}$$

donc $(f_n)_n$ converge vers f sur $[a, b]$.

7.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I intervalle, et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j ,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k ,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $(f_n^{(k)})_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que g_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $(f_n)_n$ et la convergence uniforme de toutes les $(f_n^{(j)})_n$, pour $j \geq 1$.

Si $f_n \in \mathcal{C}^k$ pour tout n

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} g_0$$

$$f_n' \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} g_1$$

$\vdots$

$$f_n^{(k-1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} g_{k-1}$$

$$f_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} g_k$$

Alors

$$g_0^{(k)} = g_k$$

$f_n \in \mathcal{C}^{k+1}$

$$f_n \xrightarrow{CS} g_0$$

$$f_n' \xrightarrow{CS} g_1$$

$\vdots$

$$f_n^{(k-1)} \xrightarrow{CS} g_{k-1}$$

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{CS} g_k$$

$$f_n^{(k+1)} \xrightarrow{CU} g_{k+1}$$

Preuve: par récurrence.

- Pour $k=1$, c'est le th précédent
- Soit $k \geq 1$. On suppose le th vérifié pour k .

Soit $(f_n)_n$ suite de fcts de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ où

$$f_n \xrightarrow{CS} g_0, \dots, f_n^{(k-1)} \xrightarrow{CS} g_{k-1}$$

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{CS} g_k \quad f_n^{(k+1)} \xrightarrow{CU} g_{k+1}$$

Par le th de classe $\mathcal{C}^1$ à $(f_n^{(k)})_n$, on sait que:

$$g_k \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } g_k' = g_{k+1}$$

et de plus, $(f_n^{(k)})$ converge vers g_k sur tout $[a, b) \subset I$.

On peut donc appliquer l'H.R sur $[a, b)$

$$\text{donc } g_0 \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ et } g_0^{(k)} = g_k$$

$$\text{or } g_k \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ donc } g_0 \text{ est } \mathcal{C}^{k+1}$$

$$\text{et } g_0^{(k+1)} = (g_0^{(k)})' = g_k' = g_{k+1}$$

sur tout $[a, b) \subset I$, donc sur I .

(par le caractère local de la dérivée)

8 Théorèmes d'approximation uniforme

8.1 Approximation par des fonctions en escalier

Théorème.

Toute fonction continue (par morceaux) sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

8.2 Approximation par des fonctions polynomiales

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Remarque. On parle ici de fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'hypothèse de continuité est importante, celle de segment aussi.

