

Pour ve: 530.1, 530.9, 530.21

Pour le: à rédiger avant 7<sup>h</sup>00: 220.13, 220.14, 620.11, 620.12

DS 4h

## Suites de fonctions numériques

### Je me souviens

1. Que signifie «  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  » ?
2. Que signifie «  $g$  est en escalier sur  $[a, b]$  » ?
3. Selon les valeurs de  $x$  réel, que peut-on dire de la suite  $\left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)_n$  ?
4. Y a-t-il une différence entre

$$\forall x \in [0, 1[, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, |x^n| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall x \in [0, 1[, \forall n \geq n_0, |x^n| \leq \varepsilon ?$$

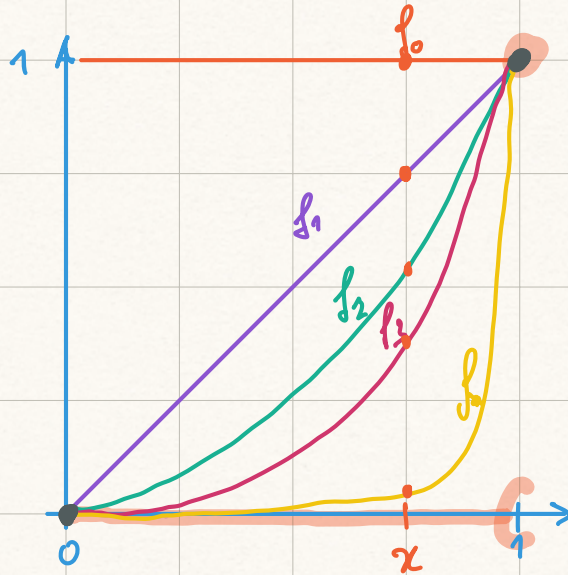
5. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^n) \right)$  ? et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 1} (x^n) \right)$  ?

## 1 Quelques exemples

**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

1. Représenter quelques fonctions  $f_n$ .
2. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite ?
3. Continuité ?



$$\begin{aligned} f_n(x) = x^n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{si } x < 1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{si } x = 1 \end{aligned}$$

**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto n^2 x (1 - x^2)^n \end{aligned}$$

1. Représenter quelques fonctions  $f_n$ . *tableau de variations*
2. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite?
3. Intégrale sur  $[0, 1]$ ?

*pour  $n \geq 2$*

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^2 (1 - x^2)^n + n^2 x n (-2x) (1 - x^2)^{n-1} \\ &= n^2 (1 - x^2)^{n-1} [1 - x^2 - 2n x^2] \\ &= -(2n+1) n^2 (1 - x^2)^{n-1} \left( x^2 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= -(2n+1) n^2 (1 - x^2)^{n-1} \left( x - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) \left( x + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

| $x$       | 0     | $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ | 1          |
|-----------|-------|-------------------------|------------|
| $f'_n(x)$ | $n^2$ | +                       | 0          |
| $f_n$     | 0     | $\nearrow$              | $\searrow$ |

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right)^n \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} e^{n \ln \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{or } n \ln \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \sim n \cdot \left( - \right) \frac{1}{2n+1}$$

$$\xrightarrow{+ \infty} -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \cdot e^{-1/2} \\ &\sim \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2e}} \end{aligned}$$



**Exemple.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

1. Est-ce que  $(f_n(x))_n$  admet une limite ?
2. Dérivées ?

**Remarque.** La convergence « point à point » des suites de fonctions ne permet pas le passage à la limite dans la continuité, le calcul d'intégrales, la dérivation.

## 2 Convergence simple

### 2.1 Définition

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge simplement sur  $I$**  vers  $f$  si et seulement si, pour tout  $x \in I$  **fixé**, la suite numérique  $(f_n(x))_n$  converge vers  $f(x)$ . La fonction  $f$  s'appelle alors la **limite simple** de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$  signifie  $\forall x \in I$  fixé  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

limite de 1<sup>re</sup>  
↓

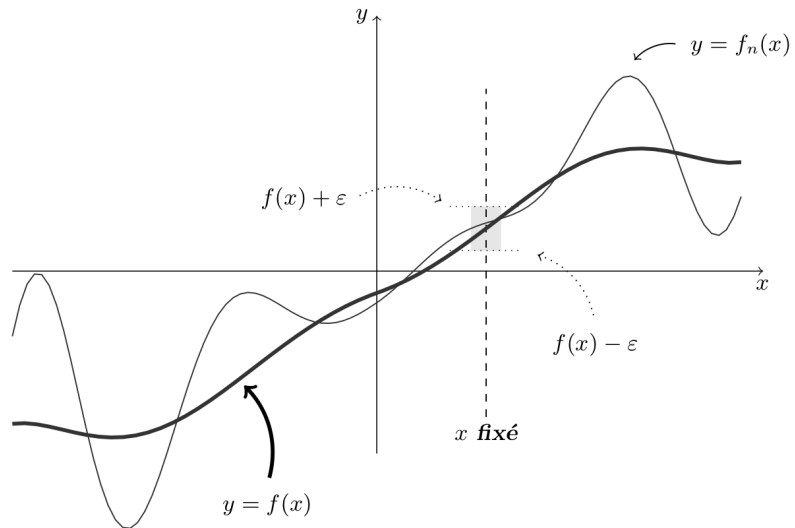
#### Remarque.

- $(f_n)_n$  **converge simplement sur  $I$**  si et seulement s'il existe  $f$  telle que  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ .
- Étudier la convergence simple de  $(f_n)_n$ , c'est étudier la convergence de la suite  $(f_n(x))_n$  à  $x$  fixé.
- On trouve parfois la notation  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$ .
- On peut quantifier la proposition «  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  » :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice  $N$  à partir duquel  $f_n(x)$  approche  $f(x)$  à  $\varepsilon$  près dépend de  $x$ .

Interprétation graphique.



**Exemple.** Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par :

1.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$

Déjà on:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CS} f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$

Étude de la cv simple :

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  fixé

$$g_n(x) = \frac{1}{n+x^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

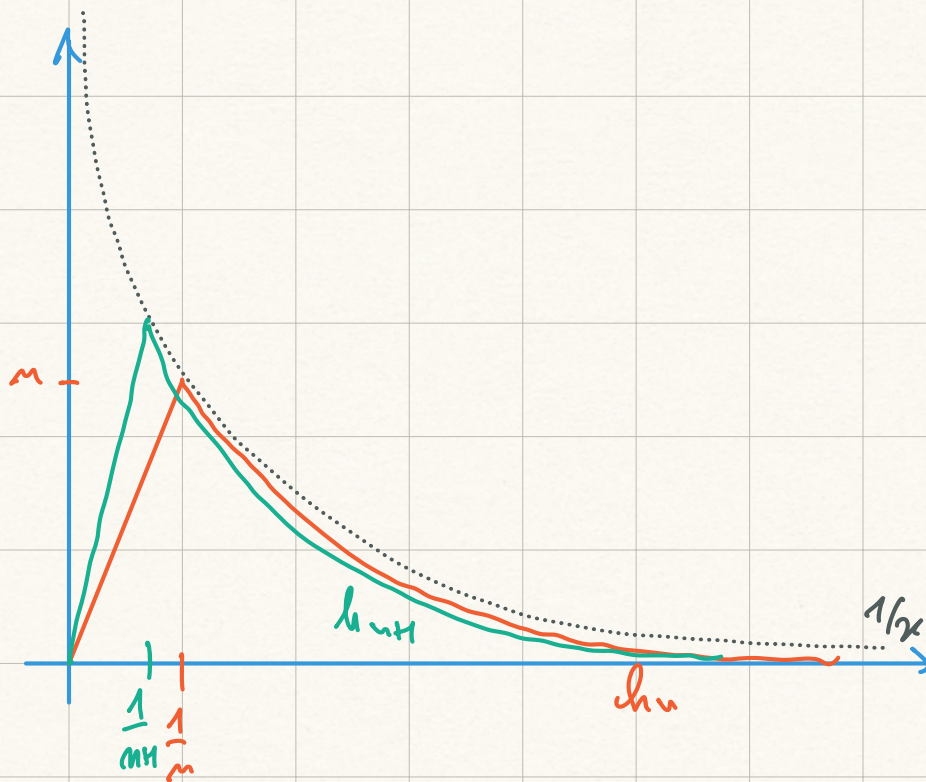
Donc

$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CS} (x \mapsto 0)$$

~~$$g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CS} 0$$~~

3.  $h_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$

$n$  fixé



Étude la cs simple

Soit  $n \in \mathbb{R}_+$  fixé

1<sup>re</sup> cas:  $x \neq 0$  Au voisinage de  $n \rightarrow +\infty$

$n > \frac{1}{x}$  donc  $h_n(x) = \frac{1}{x}$

On inverse le conditionnement.

$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{x}$

2<sup>e</sup> cas  $x = 0$   $h_n(x) = 0$

$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Pour  $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} h : x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

## 2.2 Propriétés

---

**Proposition.** Si  $B \subset I$  et si la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ ,  
alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f|_B$  sur  $B$ .

**Proposition.** Si les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers  $f$  et  $g$  sur  $I$  et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  
alors la suite de fonctions  $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$ .

### 3 Interlude : la norme infinie

L'étude plus systématique des normes sera faite dans un chapitre dédié. On peut déjà donner la définition, où  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

**Définition.** On appelle **norme** sur  $E$  une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$  positivité
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  homogénéité
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  inégalité triangulaire
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$  séparation

Pour  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$  des fonctions  $A \rightarrow \mathbb{K}$  bornées est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en définissant :

**Définition.** Pour  $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ , on note :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

**Proposition.**  $\|\cdot\|_{\infty}$  est une norme.

*Preuve.*

□

**Remarque.** Il importe de savoir rédiger l'inégalité triangulaire.

Preuve:

- Pour  $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ , montre  $\|f\|_{\infty}$  existe

(lorsque défini par un sup, justifier l'existence)

$\{|f(x)|, x \in A\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$   
non vide  
majorée car  $f$  bornée

Donc  $\sup \{|f(x)|, x \in A\}$  existe

Le sup est le plus petit des majorants

- $\forall x \in A, |f(x)| \geq 0$  donc  $\|f\|_{\infty} \geq 0$
- On admet l'homogénéité ici
- Inég triangulaire Soit  $f, g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$

$$\text{Il reste } \|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

On veut donc majorer  $\sup_{x \in A} |(f+g)(x)|$ .

C'est-à-dire majorer  $|(f+g)(x)|$  uniformément sur  $A$  indépendamment de  $x$ .

$$\forall x \in A \quad |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq \cancel{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{indép. de } x$$

$$\text{Donc } \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{par déf. du Sup}$$

• Séparati :

$$\text{Soit } f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K}) \text{ tq } \|f\|_\infty = 0$$

$$\text{Alors } f = 0_{\mathcal{B}(A, \mathbb{K})}$$

$$\text{Pour } x \in A \quad 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$$

$$\text{donc } f(x) = 0$$

**Corollaire.**  $\|\cdot\|_\infty$  est aussi une norme sur l'espace  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions continues sur le segment  $[a, b]$ .

*Preuve.* Par le théorème des bornes atteintes (fonctions continues sur un segment),  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ . □

## 4 Convergence uniforme

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge uniformément** sur  $I$  vers  $f$  si et seulement si la suite numérique  $(\|f_n - f\|_\infty)_n$  converge vers 0. La fonction  $f$  est alors appelée **limite uniforme** de  $(f_n)_n$ .

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f \quad \text{équivalent} \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$f_n \xrightarrow{CU} f \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N \quad \left\{ \begin{array}{l} \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \\ \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

$$f_n \xrightarrow{CU} f \quad \forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

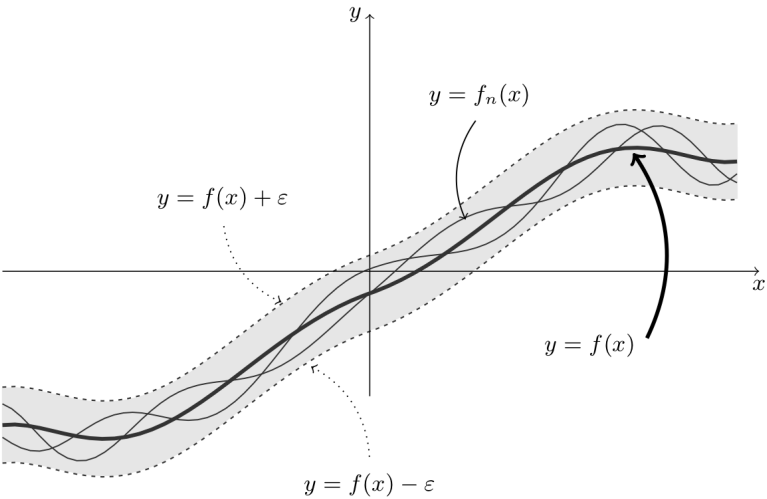
### Remarque.

- Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, au moins à partir d'un certain rang, la fonction  $f - f_n$  soit bornée sur  $I$ .
- On trouve parfois la notation  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ .
- On peut quantifier la proposition «  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  » :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice  $N$  à partir duquel  $f_n(x)$  approche  $f(x)$  à  $\varepsilon$  près est indépendant de  $x$ . C'est le même pour tout  $x$ , on dit qu'il est *uniforme*, ce qui donne son nom à ce mode de convergence de la suite de fonctions.

Interprétation graphique.



### Théorème.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

### Remarque.

- La réciproque est fausse.
- Si une suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément, sa limite uniforme coïncide avec sa limite simple.

On suppose  $f_n \xrightarrow{CU} f$

Pape  $f_n \xrightarrow{CS} f$

Soit  $x \in A$  fixé

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

Donc  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$

## 5 Transfert de continuité par convergence uniforme

### Théorème.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$ .

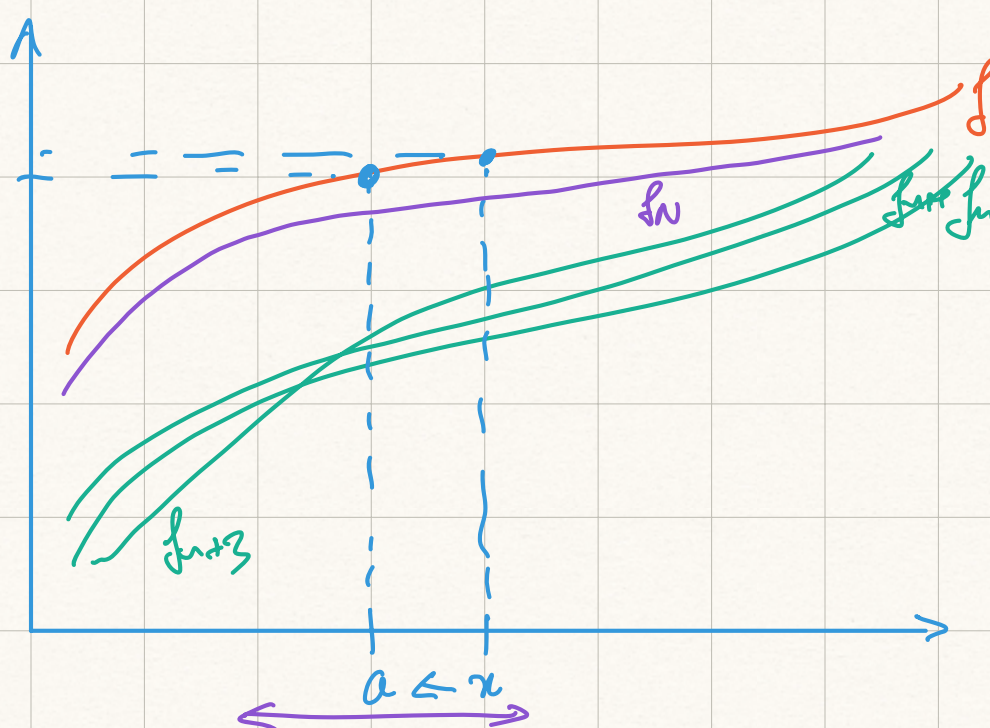
Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ,
- $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ ,

alors :

- $f$  est continue sur  $I$ .

Preuve:



Soit  $a \in I$ . Prove  $f$  continue en  $a$  en revenant à la def.

Soit  $\varepsilon > 0$

- par def de la cv uniform, avec  $\frac{\varepsilon}{3}$

$$\exists N \text{ tq } \forall n \geq N \quad \|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{en particulier: } \|f_N - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

- par def de la continuité de  $f_N$  en  $a$  avec  $\frac{\varepsilon}{3}$

$$\exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[ \cap I \quad |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On a alors: pour  $x \in ]a-\eta, a+\eta[ \cap I$

$$|f(x) - f(a)|$$

$$= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)|$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$$

$$\leq \|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(a)| + \|f_N - f\|_\infty$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon$$

donc  $f$  est continue en  $a$ .

**Corollaire.** Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ , que les  $f_n$  sont continues sur  $I$  mais que  $f$  n'est pas continue sur  $I$ , alors la convergence n'est pas uniforme sur  $I$ .

## 4 Convergence uniforme

### Définition.

#### Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ .  
Une représentation graphique peut aider.
- On cherche à majorer  $|f_n(x) - f(x)|$  **indépendamment** de  $x$  par une suite qui converge vers 0.
- La recherche précise de  $\|f_n - f\|_\infty$  peut se faire par l'étude des variations de  $|f_n - f|$ .

#### Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ .  
Une représentation graphique peut aider.
- S'il n'existe pas de rang à partir duquel  $f_n - f$  est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- On peut montrer le non-transfert à la limite d'une propriété (voir § 5 et chap 531).

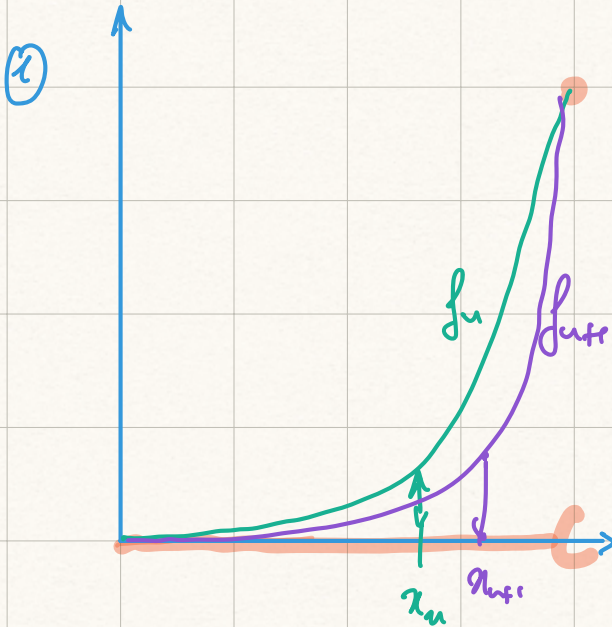
 On exhibe une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $I$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$  ne converge pas vers 0.

**Exemple.** Étudier la convergence uniforme des trois suites de fonctions :

1.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$  ✗

2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$

3.  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$



$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\downarrow$$

$$0$$

Posons  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_n)| &= \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 0 \right| \\ &= e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{n \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-1 + o(1)} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

Donc la cv n'est pas uniforme.

$$(2) \quad g_n(x) = \frac{1}{n+x^2} \quad g(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n+x^2}$$

$$\leq \frac{1}{n}$$

indép de  $x$

(\*)

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cv} g$$

$$\text{donc } \|g_n - g\|_\infty \leq \frac{1}{n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

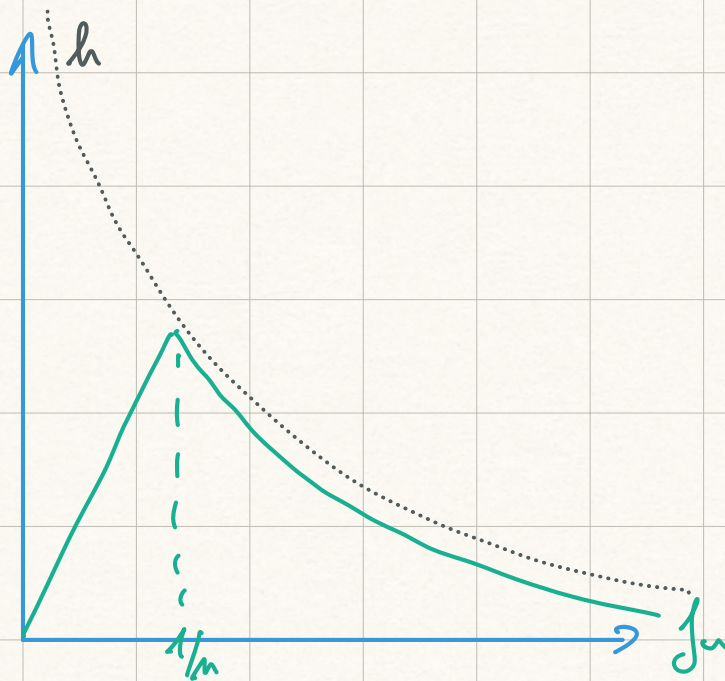
$$(3) \quad h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cs} h: x \mapsto \begin{cases} 1/n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

les  $h_n$  sont continues sur  $[0, +\infty[$

$$\left( n^2 x \xrightarrow[x \geq \frac{1}{n}]{} n \xleftarrow[x > \frac{1}{n}]{} \frac{1}{x} \right)$$

Or la non continue, donc la convergence  
n'est pas uniforme sur  $[0, +\infty[$

Est-ce que la convergence est uniforme sur  $]0, +\infty[$  ?



M1:  $x_n = \frac{1}{2n}$

$$|h(x_n) - h_n(x_n)| = \frac{1}{\frac{1}{2n}} - n^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{3}{2}n$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

M2  $h(x) - h_n(x) = \frac{1}{x} - n^2 x$

$n$  fixé  
 $x$  au voisinage de 0

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

donc  $h - h_n$  non bornée sur  $]0, +\infty[$

donc  $\|h - h_n\|_\infty$  n'existe pas.

Est-il y a convergence uniforme sur tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  ?

## 4.1 Propriétés

---

**Proposition.** Si  $B \subset I$  et si la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $B$ .

**Proposition.** Si les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  sur  $I$  et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors la suite de fonctions  $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$ .

## 4.2 Convergence uniforme sur tout segment

---

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonctions  $I : \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que  $(f_n)_n$  **converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$**  si et seulement si pour tout segment  $[a, b] \subset I$ ,  $(f_n|_{[a, b]})_n$  converge uniformément vers  $f|_{[a, b]}$  sur  $[a, b]$ .

**Exemple.** Étudier la convergence uniforme sur tout segment des trois suites de fonctions :

1.  $f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f_n(x) = x^n$

2.  $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $g_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$

3.  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

**Remarque.** La convergence uniforme sur tout segment de  $I$  n'est pas équivalente à la convergence uniforme sur  $I$ . C'est une notion plus faible, mais on verra qu'elle pourra suffire à transmettre à la limite certaines propriétés.

**Exemple.**

1. Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégral pour montrer :  $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$  pour tout  $t \geq 0$ .
2. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



















