

Pour me : 620.10, 620.13, 220.9

Colles, ex à rédiger.

Analyse asymptotique

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique? *Comportement au voisinage de*
 $n \rightarrow +\infty$
 $n \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow 0$
2. Ça veut dire quoi, négligeable?
3. C'est quoi, un $o(1)$?

② Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$:

Dire que $u_n \ll v_n$ ou $u_n = o(v_n)$

signifie

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ou: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ s.t. } \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$

"Super majoration de u_n par v_n ".

③ $o(1)$ signifie tend vers 0.

$$o(n) = n o(1)$$

$$\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \\ &= v_n o(1) \end{aligned}$$

4. Ça veut dire quoi, dominé?
5. C'est quoi, un $O(1)$?
6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?

④ Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$

$u_n = O(v_n)$ signifie ~~$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ borné~~

ie $\exists A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq A$

$$|u_n| \leq A |v_n|$$

"c'est une sorte de majoration".

$O(1)$ signifie borné.

$$u_n = O(v_n)$$

$$= v_n O(1)$$

⑤ oui! ce sont des égalités...

7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?

(7) Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$

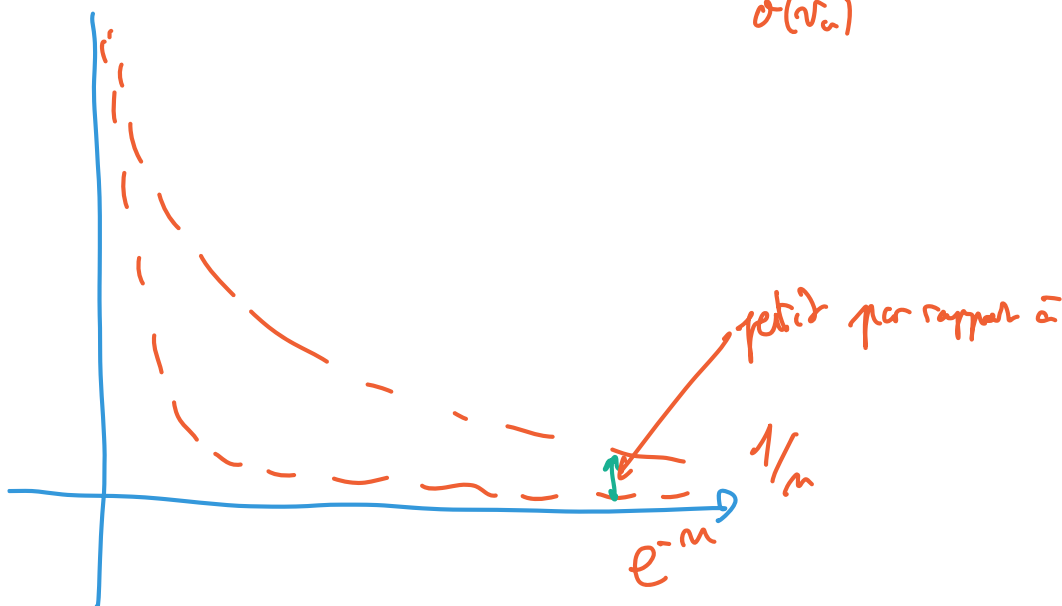
$u_n \sim v_n$ signifie

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$$

$$u_n = v_n + \text{erreur}$$

$$o(1)$$

$$o(v_n)$$



$u_n \sim v_n$ signifie

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

$$= v_n (1 + o(1))$$

$$\left(\frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1) \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Rel. d'équivalence	réflexive	R
	symétrique	S
	transitive	T

Opérations

Si $u_n \sim v_n$

alors $u_n + w_n \sim v_n + w_n$ ✓

et $u_n w_n \sim v_n w_n$ ✓

et $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ ✓

$u_n^d \sim v_n^d$ ✓

on remplace $\sim$ par une égalité et
alors on peut soulever.

$u_n = v_n + o(v_n)$ donc $u_n + w_n = v_n + w_n + o(v_n)$

Pas de composition d'équivalents ← Si
on travaille par égalités.

Exemple Au voisinage de $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin x - \ln(1+x) &= x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \frac{x^2}{2} \in o(x)$$

~~illusoire~~

12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?

Ex de référence.

Am vis de $x \rightarrow +\infty$

$$\ln^\beta(x) = o(x^\alpha)$$

$$\forall \alpha, \beta > 0$$

$$x^\alpha = o(e^x)$$

$$x^\alpha = o(x^\beta) \quad \text{lorsque } \alpha < \beta$$

Am visage de $x \rightarrow 0$

$$x \ln x = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

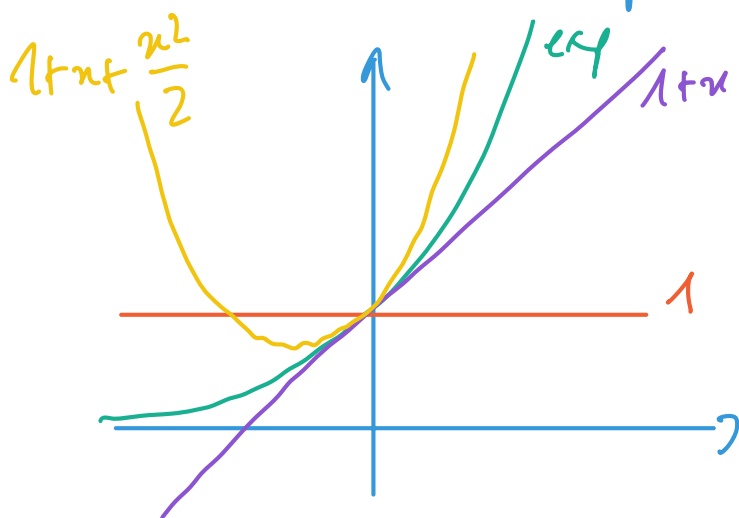
$$\xrightarrow[x >]{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{car} \quad \ln(u) = o(u)_{u \rightarrow +\infty}$$

13. C'est quoi, un développement limité en 0?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent? un équivalent donne un DL?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître?
16. Opérations sur les DL?
17. C'est quoi, un développement limité en a ?

Au vis de $x \rightarrow 0$

(13) $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

C'est une égalité à un polynôme à un $o(\dots)$ près
Remplacer un exp par un polynôme plus simple



$$e^x = 1 + o(1)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

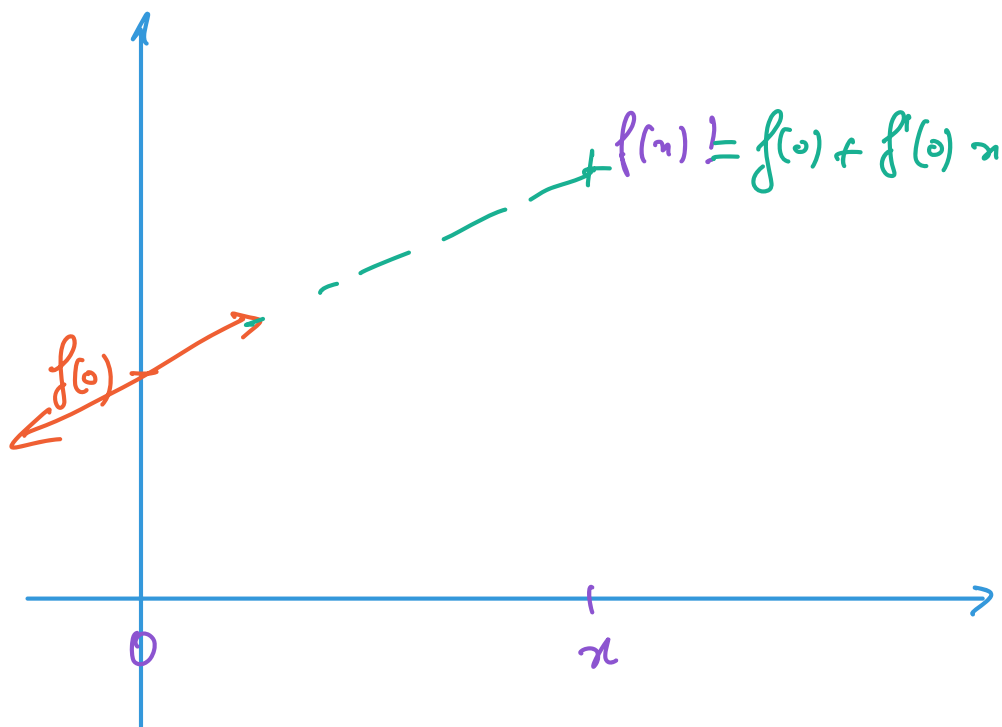
~~Fondle~~ Taylor-Young:
Théorème

Si f est $\mathcal{C}^n$

Alors f admet un $DL_n(0)$ qui est:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

→ à ne jamais utiliser pour calculer un DL.



Exemp: $f(x) = \text{Arctan}(\ln(1+x))$

$DL_2(0) ?$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \cancel{\frac{x^5}{5}} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + O(x^6)$$

$$x^5 \underbrace{u O(1)}_{o(1)}$$

per primitivale

Arctan

$$\text{Arctan}(u) = 0 + u - \frac{u^3}{3} + \cancel{\frac{u^5}{5}} + o(u^3)$$

1x $u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \cancel{\frac{x^5}{5}} + o(x^3)$

$$u^3 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \cancel{\frac{x^5}{5}} + o(x^3) \right)^3$$

$$= x^3 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^3$$

$$= x^3 (1 + o(1))$$

$$-\frac{1}{3} \times \quad = x^3 + o(x^3)$$

$$o(x^3) = o(x^3)$$

Car $u \sim x$

$$\text{Dnc } \text{Arctan}(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) + o(x^3)$$

DL en a où $a \neq 0$?

Aut voisinage de $x \rightarrow a$

$$\hookrightarrow x = a + h \text{ où } h \rightarrow 0$$

$$f(a+h) = \text{DL}_{h \rightarrow 0} \text{ de } f(a+h)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_n h^n + o(h^n)_{h \rightarrow 0}$$

$$\cancel{f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \dots + o((x-a)^n)}$$

18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim ?$
20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.
21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim u_n$?

520.25

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} e^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{1 + (-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

(d) Déterminer le domaine de définition de S .

Question bien mal formulée !

Est-ce que $S(\underline{0})$ existe ? à $\sum \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n}$ cv ?

Raisonnement usuel :

Au vois de
 $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln n}{1 + (-1)^n n} &= \frac{\ln n}{(-1)^n n} \left(\frac{1}{\frac{1}{(-1)^n n} + 1} \right) \\ &= \frac{\ln n}{(-1)^n n} \left[1 - \frac{1}{(-1)^n n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$

$$= (-1)^n \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

