

Pour ma : 620.1, 620.2

TYPE

3 Matrice comme représentation d'application linéaire

3.1 Matrice d'application linéaire

Définition. Soit E, F deux espaces de dimensions finies p et n respectivement, munies des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

où, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ est le n -uplet des coordonnées de $u(e_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$.

Remarque. Dans une matrice d'application linéaire, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ en fonction des vecteurs f_i .

E a de dim finie n

$\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E

$u \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} u(e_1) & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} u(e_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$$= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1) \dots u(e_n))$$

$$E \longrightarrow F$$

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases fixées de E et F respectivement :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ u &\mapsto \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ est une base fixée de E :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u &\mapsto \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres, qui induit un isomorphisme de groupes entre $(\text{GL}(E), \circ)$ et $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$.

Proposition. Avec les mêmes notations, et en notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$, et $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, on a :

$$y = u(x) \iff Y = MX$$

$$\text{Mat}(u \circ v, \mathcal{B}) = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \times \text{Mat}(v, \mathcal{B})$$

$\circ$ non commutative

$\times$ non commutative

$$u \in \text{GL}(E) \quad \text{Mat}(u^{-1}, \mathcal{B}) = (\text{Mat}(u, \mathcal{B}))^{-1}$$

vectoriel $\xleftrightarrow{\text{base fixée}}$ matriciel

x

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

y

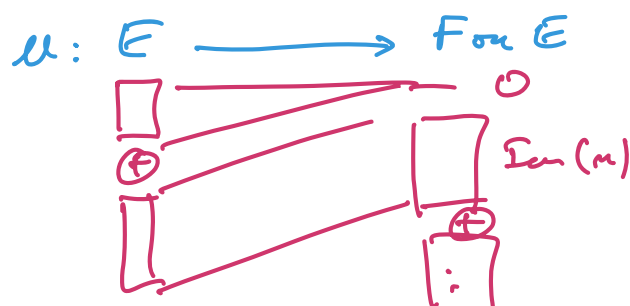
$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

$u \in \mathcal{L}(E)$

$$A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$$

$$y = u(x)$$

$$Y = AX$$



$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1 \dots C_n) \quad \text{colonnes de } A$$

3.2 Théorème du rang matriciel

Définition. Le rang d'une matrice A , c'est la dimension de $\text{Im } A$, c'est-à-dire le rang de la famille de ses colonnes.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg}(A) + \dim \text{Ker } A = p \quad (\text{le nombre de colonnes de } A)$$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg}(A) + \dim \text{Ker } A = n$$

Rang : $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$
 $\parallel$
 $\dim \mathcal{L}(E)$

E de dim n
 ϕ isomorphe

le li du rang : $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
 $A \longmapsto \text{tr}(A)$
 vectoriel

Rang : le li du matriciel, c'est le li du rang appliqué à

$$a : \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$$

$$X \longmapsto AX$$

3.3 Retour sur la matrice de passage

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors :

$$P = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Corollaire. L'inverse de P est la matrice de passage « dans l'autre sens » :

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1} = \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$$

E de dim n $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E ancienne
 $\mathcal{B}' = (e'_1 \dots e'_n)$ base de E nouvelle
Matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$

$$P = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$

$$Q = \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

Propriété: $Q = P^{-1}$
Preuve: $P = \begin{pmatrix} \text{Id}(e'_1) & \dots & \text{Id}(e'_n) \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

$$\text{ou } f: E, \mathcal{B}' \longrightarrow E, \mathcal{B} \\ x \longmapsto x$$

$$Q = \text{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P^{-1}$$

4 Formules de changement de base

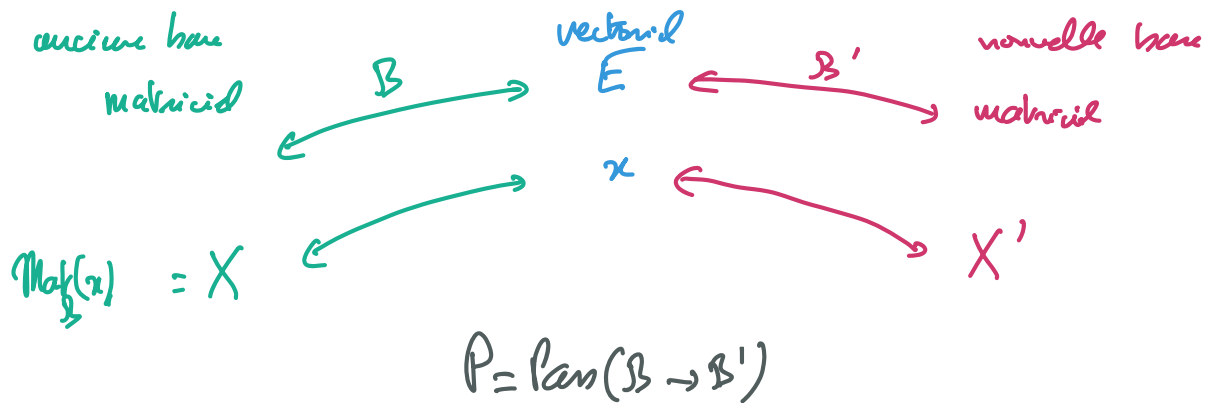
Remarque. Toutes les formules de changement de base doivent être connues sous la forme « expression dans l'ancienne base » en fonction de l'« expression dans la nouvelle base ».

4.1 Changement de base pour un vecteur

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$.
Soit $x \in E$ un vecteur. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors :

$$X = PX'$$



$\text{fc de chg de base: } X = PX'$

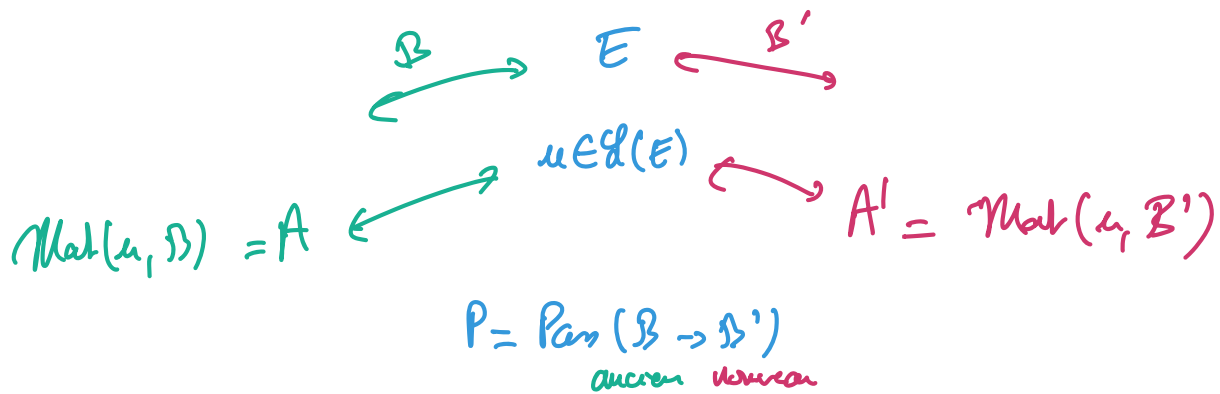
(l'inverse on a aussi $X' = P^{-1}X$)

4.2 Changement de base pour un endomorphisme

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ $A' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$. Alors :

$$A = P A' P^{-1}$$



fg de chg de base:

$$A = P A' P^{-1}$$

~~$$P^{-1} A P = A'$$~~

Remarque:

$Y = AX \qquad u(x) \qquad A'x' = Y'$

$$AX = (P A' P^{-1})(P x')$$

$$= P A' x'$$

$$Y = P Y'$$

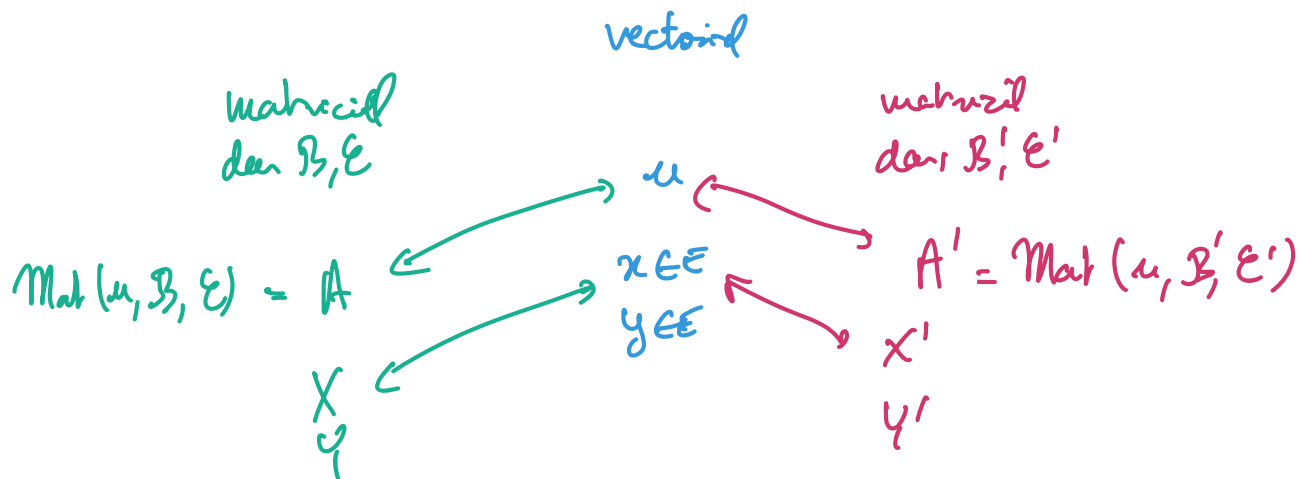
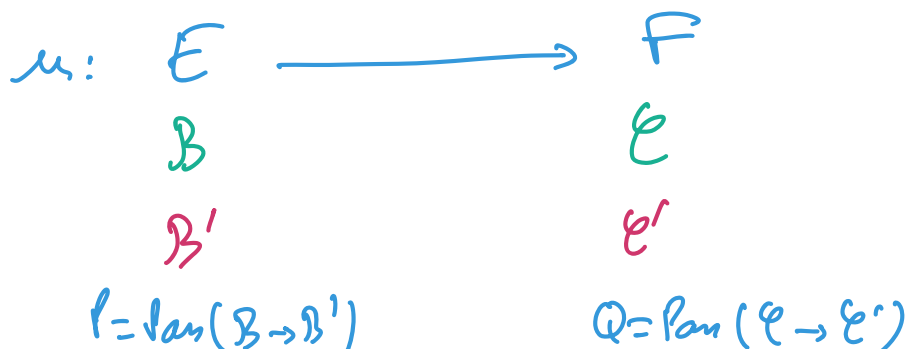
4.3 Changement de base pour une application linéaire

Proposition. Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$.

Soit F un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note $Q = \text{Pass}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ $A' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$. Alors :

$$A = Q A' P^{-1}$$



$$A = Q A' P^{-1}$$

$F \longleftarrow E \quad F \longleftarrow E$

ancien
base canonique de $\mathbb{R}^3$

nouveau
base $e'_1 = (1, 1, 1)$
 $e'_2 = (1, 2, 3)$
 $e'_3 = (1, 4, 9)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

5 Matrices semblables

Définition. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Théorème.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, c'est-à-dire :

$\exists E$ espace vectoriel, $\exists u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists B, B'$ bases de E t.q. $A = \text{Mat}(u, B)$ et $B = \text{Mat}(u, B')$

Remarque: c'est une relation d'équivalence

reflexive
symétrique
transitive.

Preuve: $\boxed{\Leftarrow}$ c'est la formule de changement de base avec $P = \text{Pass}(B \rightarrow B')$
 $A = PBP^{-1}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ t.q. $A = PBP^{-1}$

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a de B une base canonique.

on canoniquement associe à A : $A = \text{Mat}(u, B)$

Soit B' t.q. $P = \text{Pass}(B \rightarrow B')$

ie $B' = (C_1, \dots, C_n)$ colonnes de P .

c'est une base de E , car P est inversible.

On note $A' = \text{Mat}(u, B')$

Par changement de base, $A = PA'P^{-1}$

donc $A' = P^{-1}AP = B$

□

6 Trace d'une matrice

Définition. La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition.

- tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour A, B telles que AB et BA sont carrées :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\begin{aligned} &A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \text{ou } &\begin{cases} A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \end{cases} \end{aligned}$$

Corollaire. Deux matrices semblables ont la même trace.

lung: $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$
 $\neq \text{tr}(BAC)$ a priori

lung: à savoir justifier.

"la trace est un invariant de similitude"

preuve: $\exists P, A = PBP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$

alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(PBP^{-1})$

$$= \text{tr}(P^{-1}PB)$$

~~car $\text{tr}(P^{-1}P) = \text{tr}(I_n)$~~

$$= \text{tr}(B)$$

Il y a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$$

$$BA = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$$

$$\text{ou } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

On calcule: $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_i$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^n d_{kk}$$

$$= \text{tr}(BA)$$

Autre notation

Pour n matrices, on note $[M]_{ij}$ sont coeff ij

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{kj}$$

...

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de u** la trace de toute matrice représentant u .

Proposition. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$$

Proposition. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Remarque. elle est indépendante du choix de la base, par le résultat précédent.

matriciel $\xleftrightarrow{\mathcal{B}}$ vectoriel

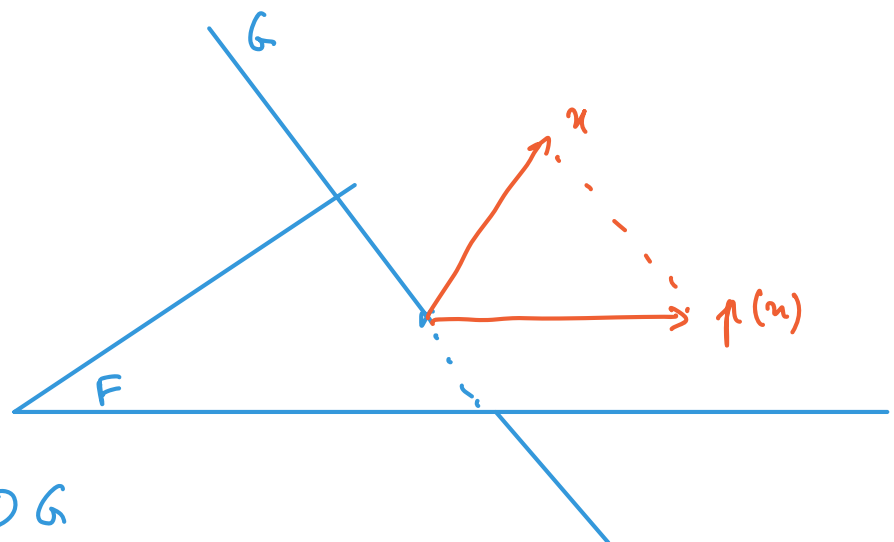
$$A \longleftrightarrow u$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(u)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(u \circ v)$$

Proposition. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Soit p projecteur sur F de direction G



$$E = F \oplus G$$

On considère $\mathcal{B}$ une base adaptée à $F \oplus G$

i.e. $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ où $\mathcal{B}_F$ base de F
 $\mathcal{B}_G$ base de G

$$F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$$

$$G = \text{Ker } p$$

$$\text{Mat}(p, B) = \begin{pmatrix} \overset{\text{image } B_F}{\begin{matrix} p(e_1) & \dots & p(e_r) \end{matrix}} & \overset{B_G}{\begin{matrix} p(e_{r+1}) & \dots & p(e_n) \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (0) & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \quad \begin{matrix} B_F \\ \\ B_G \end{matrix}$

$$r = \dim F = \dim \text{Im } p = \text{rg } p$$

$$\text{tr}(p) = \text{tr}(\text{Mat}(p, B)) = r$$

$$u: E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto u(x)$$

7 Sous-espaces stables

7.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si et seulement si $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Remarque. On peut écrire $u(F) \subset F$, en utilisant la notion d'image directe d'un ensemble par une application. L'intérêt de cette notion vient surtout du fait que l'on peut alors donner la définition suivante :

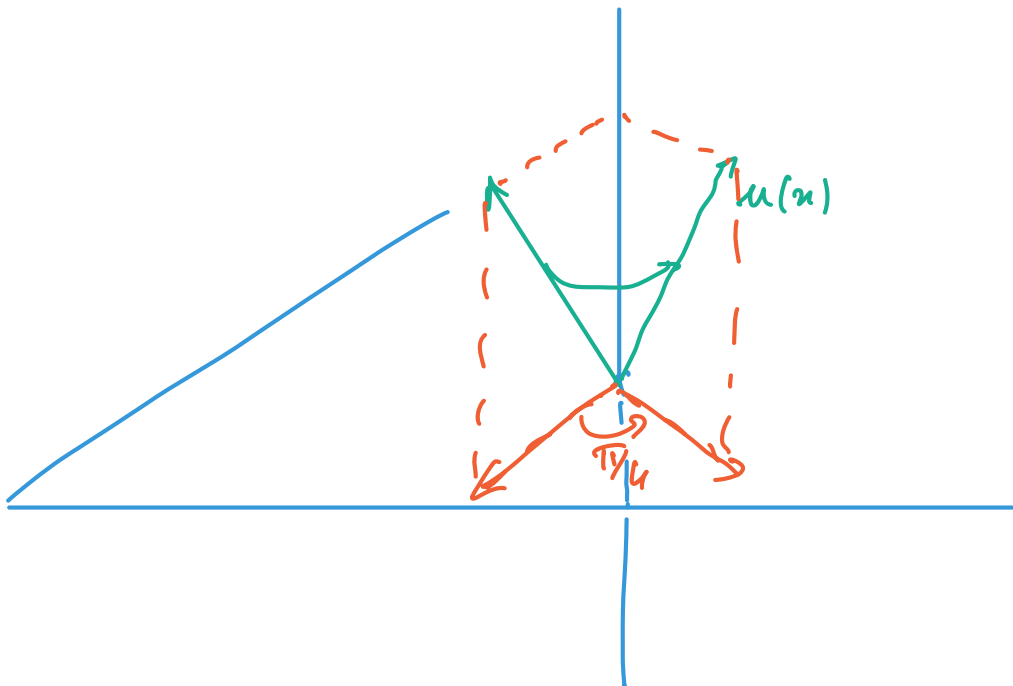
Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . On peut définir :

$$u_F : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto u(x)$$

qui est un endomorphisme de F , appelé **endomorphisme induit**.

Remarque. Ce n'est pas exactement la restriction de u à F , puisque le but aussi est réduit à F .



Proposition. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u , alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u .

Théorème.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Corollaire. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \lambda \text{Id})$ sont stables par v .

$u - \lambda \text{Id}$ et v commutent

Preuve: • Soit $x \in \text{Ker } u$

Alors $v(x) \in \text{Ker } u$

On calcule $u(v(x)) = u \circ v(x)$

$$= v(u(x))$$

$$= v(0) \quad \text{car } x \in \text{Ker } u$$

$$= 0$$

• Soit $y \in \text{Im } u$ i.e. $\exists x \in E$ t. $y = u(x)$

Alors $v(y) \in \text{Im } u$

$$v(y) = v(u(x))$$

$$= u(v(x))$$

$$\in \text{Im } u$$

7.2 Stabilité et matrices par blocs

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n , F un sous-espace vectoriel de dimension p . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E)$. On a la caractérisation suivante :

F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_F .

Ce bloc de 0 donne: $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_1)$ stable par u .

(toute CL de $e_1 \dots e_p$ a pour image une CL de $e_1 \dots e_p$)

Dans ce cas : on peut définir l'endomorphisme induit

par u sur F $u_F : F \longrightarrow F$
 $x \longmapsto u(x)$

et $A = \text{Mat}(u_F, \mathcal{B}_1)$

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i. \text{ Soit } u \in \mathcal{L}(E).$$

Les F_i sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit $u|_{F_i}$.

Corollaire. Soit E un espace de dimension finie n , de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \text{Vect}(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \text{ base adaptée à } F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 \end{matrix}$$

$u(\mathcal{B}_1) \quad u(\mathcal{B}_2) \quad u(\mathcal{B}_3)$
 $u(e_1^1) \dots u(e_{n_1}^1) \quad u(e_1^2) \dots u(e_{n_2}^2) \quad \dots$

$A_1 = \text{Mat}(u|_{F_1}, \mathcal{B}_1)$

