

Par re: 220.1, 220.7

Pom lu 7⁰⁰ à rédiger 520.25, 520.26, 210.29, 210.30
au choix

Compléments sur les matrices

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une **matrice** ?
2. À quoi ça sert ?
3. Qu'est-ce que la matrice d'un vecteur ? d'une famille de vecteurs ? d'une application linéaire ?

① Tableau de scalaires $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} n \text{ ligne} \\ p \text{ colonnes} \end{matrix}$

a_{ij}
↑
indice de ligne
↑
colonne

$M_{mp}(\mathbb{K})$

$M_n(\mathbb{K})$

② Résume en 1 tableau toute une application linéaire

$$\begin{aligned} u: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

→ on peut faire du calcul avec, par ex, calculer $u(x)$

4. Y a-t-il un isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices ?
5. Qu'est-ce que l'application linéaire canoniquement associée à une matrice ?
6. Que sont l'image et le noyau d'une matrice ?

④ Ouais.

Soit E $\mathbb{K}$ de dim finie, $B = (e_1 \dots e_n)$ base de E fixée

$$\phi_{E,B} : (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot) \longrightarrow (M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$$

$$u \longmapsto \text{Mat}(u, B)$$

ϕ isomorphisme d'algèbre.

$$\phi(\lambda u + \mu v) = \lambda \phi(u) + \mu \phi(v)$$

$$\text{Mat}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{Mat}(u) + \mu \text{Mat}(v)$$

$$\phi(u \circ v) = \phi(u) \times \phi(v)$$

$$\text{Mat}(u \circ v) = \text{Mat}(u) \times \text{Mat}(v)$$

$$\phi(\text{Id}_E) = I_n$$

$$\text{Mat}(\text{Id}_E) = I_n$$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

" Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A "

signifié : ① $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (\dots, \dots, \dots)$$

② $a: M_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto AX$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } A = \text{Ker } a$$

$$= \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$$

$$\text{Im } A = \{ AX, X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \}$$

$$= \{ Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ Y = AX \}$$

$$= \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$$

↑ les colonnes de A

7. Qu'est-ce que le **rang** d'une matrice?

8. Qu'est-ce que la **transposée** d'une matrice?

9. Qu'est-ce que la **trace** d'une matrice?

$$\textcircled{7} \quad \text{rg } A = \dim(\text{Im } A) \quad \text{oui!} \\ = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, C_3))$$

en petite dim, ça se voit

$$\textcircled{8} \quad \tau: \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A = (a_{ij}) \longmapsto A' = (a'_{ij}) \\ \begin{array}{c} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \\ \text{ou } \forall i, j \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

1 Matrice comme tableau de scalaires

1.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Proposition. Soit n, p, q des entiers. L'application $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire.
 $(A, B) \mapsto A \times B$

$$(\lambda A + \mu B) \times C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A (\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

$$u \circ v = 0 \Leftrightarrow \text{Im } v \subset \text{Ker } u$$

En passant.

$$AB = 0 \iff \text{Im } B \subset \text{Ker } A$$

"Combien de paramètres indép pour définir un él^é de $M_{np}(K)$?"

$$M_{np}(K) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, a_{ij} \in K \right\}$$

Proposition. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Il est de dimension finie np .

Définition. La **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où les coefficients de E_{ij} sont tous nuls, sauf celui de la i -ème colonne, j -ème ligne qui vaut 1.

Remarque. Ainsi, pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on a :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij}$$

Proposition. Si les dimensions des matrices sont compatibles, par exemples pour des matrices carrées, on a :

$$E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

$$\text{ou } \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Justification

Diagram illustrating the multiplication of two matrices E_{ij} and E_{kl} in $M_3(\mathbb{R})$.

Matrix E_{ij} (left):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix E_{kl} (right):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The product $E_{ij} \times E_{kl}$ is shown as:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{il}$$

(dans $M_3(\mathbb{R})$)

$$A \times B = (c_{ij})_{i,j}$$

$$\text{ou } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Proposition. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre, non commutative et non intègre.

Proposition. $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, non commutatif.

Remarque. Il est remarquable que, pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à droite ou à gauche soit équivalent à l'existence d'un inverse.

les inversibles pour $\times$

de $\times$

$$AB=0 \not\Rightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

1.2 Opérations par blocs

1.2.1 Les blocs-colonnes, les blocs-lignes

Exemple. Calculer le produit :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. Si C est une colonne, le produit AC est une colonne, combinaison linéaire des colonnes de A .

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Cl des colon } C_1, C_2, C_3 \\ = 3C_1 - 2C_2 + C_3$$

vectoriel

E eu de dim 3

$(e_1, e_2, e_3) = \mathcal{B}$ base de E

x

u

matrices

$X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$

$u(x)$

$u(e_1)$

AX

C_1

$$u(x) = u(3e_1 - 2e_2 + e_3) = 3u(e_1) - 2u(e_2) + u(e_3)$$

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatible, on a :

$$AB = (AB_1 \mid \cdots \mid AB_q)$$

où $B_1, \dots, B_q$ sont les colonnes de B .

$$\begin{aligned} & \overset{A}{\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \right)} \overset{B}{\left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & \cdots & B_q \end{array} \right)} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} AB_1 & AB_q \end{array} \right) \\ & \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ & \quad \text{CL de } A_1 \dots A_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} L \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} B \end{array} \right) \\ &= \text{CL des lignes de } B \end{aligned}$$

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatible, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

où $A_1, \dots, A_n$ sont les lignes de A .

1.2.2 Matrices par blocs

Considérer une matrice par blocs, c'est regrouper des coefficients adjacents dans la matrice en blocs de sous-matrices.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ peut être vue par blocs en regroupant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ soit } \left(\begin{array}{cc} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = (0 \ 0)$ et $D = (2)$.

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ I}$$

Définition. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on considère des matrices :

$$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$$

et on note $N = n_1 + \dots + n_n$, $P = p_1 + \dots + p_p$. On définit alors la **matrice par blocs** :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NP}(\mathbb{K})$$

Définition. En conservant les notations précédentes, on dit que A est :

- **diagonale par blocs** lorsque pour tout i , $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i \neq j \implies A_{ij} = 0$$

- **triangulaire supérieure par blocs** lorsque pour tout i , $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i > j \implies A_{ij} = 0$$

Remarque. Une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire par blocs) n'est pas, en général, diagonale (resp. triangulaire).

Exemple. La matrice précédente est diagonale par blocs.

Combinaisons linéaires de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour les combinaisons linéaires :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j) A_{ij} et B_{ij} sont de même dimension, dans $\mathcal{M}_{n_i p_i}(\mathbb{K})$.

Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \cdots & \lambda A_{1p} + \mu B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n1} + \mu B_{n1} & \cdots & \lambda A_{np} + \mu B_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque. Ainsi, lorsque les blocs sont compatibles, les combinaisons linéaires se font bloc par bloc.

n_{ij} p_{ij}

Multiplications de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour la multiplication :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j, k) , $A_{ik} \in \mathcal{M}_{n_i p_k}(\mathbb{K})$ et $B_{kj} \in \mathcal{M}_{p_k q_j}$. Alors le produit AB s'écrit par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nq} \end{pmatrix}$$

où $C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}$, pour tout i, j .

Remarque. Il importe, avant d'envisager un produit par blocs, de bien vérifier la compatibilité pour le produit des dimensions des différents blocs.

Corollaire. Le produit de deux matrices diagonales par blocs (resp. triangulaires supérieures par blocs) est une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire supérieure par blocs).

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice :

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

Remarque. $\mathcal{B}$ étant fixée, l'application $x \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Remarque. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Définition. Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de $(x_1, \dots, x_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_p) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n1} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} x_p \\ \vdots \\ x_{np} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$$C_j = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j)$$

E de dim n , $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ $(f_1 \dots f_n)$ famille de n vectos.

$(f_1 \dots f_n)$ base de $E \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1 \dots f_n)$ inversible

$$P = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Proposition. Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(f_1, \dots, f_n) \in E^p$ une famille de n vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. La matrice de $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E si et seulement si P est inversible.

Dans ce cas, P est la **matrice de passage** de l'« ancienne » base $\mathcal{B}$ à la « nouvelle » base $\mathcal{B}'$.

Remarque. Dans une matrice de passage, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$