

$$\underline{\text{Def}} \quad \sum u_n + \sum v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum (u_n + v_n) \\ + E \times E \longrightarrow E$$

$$\underline{\text{Th}} \quad \text{Si } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ cv}$$

$$\text{alors } \sum (u_n + v_n) \text{ cv} \quad (\text{ou: } \sum u_n + \sum v_n \text{ cv})$$

$$\underline{\text{el}} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complète éventuellement avec des termes nuls pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **absolument**, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Preuve:

$$(u_i v_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$$

famille de scalaires.



On calcule dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

$[0, +\infty]$

~~$[0, +\infty[$~~

$$\forall j \quad \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| |v_j| < +\infty$$

car $\sum u_n$ est absolument.

$$\text{et} \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| |v_j| \right)$$

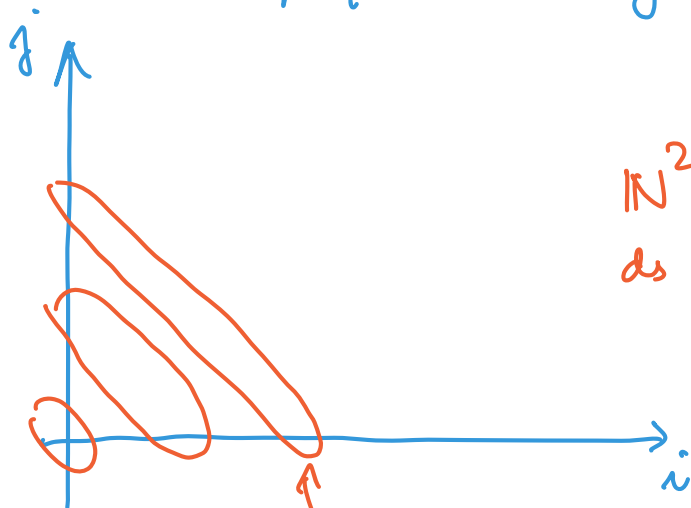
$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(|v_j| \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |v_j| \right)$$

$< +\infty$ car $\sum v_n$ conv. abs.

Donc, par le th de Fubini $\sum_{i,j} (u_i v_j)_{i,j}$ sommable.

Sommation selon les paquets où $i+j = \text{cste}$



$\mathbb{N}^2$ est union disjointe
des paquets $E_n, n \in \mathbb{N}$

$$E_2 = \{(i,j) \mid i+j=2\}$$

Par paquets, toujours dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} |u_i| |v_j| \right) < +\infty$$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} u_i v_j \right) = \sum_{i,j} u_i v_j$

↑
somme $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$

↑
 $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \right)$

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right)$$

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

On reconnaît le bg du produit de Cauchy de

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n$$

$$\text{où } u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad v_n = \frac{1}{2^n}$$

$\sum u_n$ cv absolu (Riemann)

$\sum v_n$ cv absolu (geom de ratio $\frac{1}{2}$)

Donc:

$\sum v_n$ cv absolu et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$

$$e^z \times e^{z'} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} \right)$$

• Montrons que $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergent (c'est du cours)

pour $z \neq 0$

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergent.

• On définit $\sum w_n$ produit de Cauchy de deux séries :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} (z+z')^n \quad \text{par le binôme.} \end{aligned}$$

• Par la loi du produit de Cauchy :

$$e^z \times e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

$$= e^{z+z'}$$

