

Règle de d'Alembert (séries num) $\sum u_n$ cv absolue ?

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{+\infty} \rho < 1$ alors $\sum u_n$ cv abs.

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{+\infty} \rho > 1$ alors $\sum u_n$ divergent

Si non, on ne peut rien dire (pas de limite, ou si $\rho = 1$)

Dif

$\sum u_n + \sum v_n$ est, par dif. $\sum (u_n + v_n)$

Th

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv

alors $\sum u_n + \sum v_n$ converge

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Rmq On peut définir

$$\sum u_n \times \sum v_n$$

comme étant $\sum u_n \times v_n$

mais pas intéressant.

$$(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots) \times (v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots)$$

$$(1 + 2x + 4x^2 + 3x^3) \times (2 + 5x + 3x^2)$$

$$= (1 \times 2) + (1 \times 5 + 2 \times 2)x + (\quad)x^2$$

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nuls pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **absolument**, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Reconnaissons un produit de Cauchy.

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

On reconnaît un produit de Cauchy :

$$\text{En posant } u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$v_n = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum w_n$ est le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{2^n}$$

$\sum u_n$ est absolument convergent (Riemann $\alpha=2>1$)

$\sum v_n$ est absolument convergent (géom de raison $\frac{1}{2}$)

Donc $\sum w_n$ est absolument

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \quad 1 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$

$$e^z \times e^{z'} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} \right)$$

$$\approx \dots$$

$$= \dots$$

On effectue un produit de Cauchy de $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$

en posant $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} (z + z')^n$$

La série exponentielle converge absolument (c'est du cours)

Montrer-le en appliquant la règle de d'Alembert.

pour $z \neq 0$

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument.

Ans:

$$\begin{aligned} e^z \times e^{z'} &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} \\ &= e^{(z+z')} \end{aligned}$$

