

Bon je: 210.2, 210.18, 210.25

21. Que signifie  $u \circ v = 0$ ?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie?
23. Que dire à propos des **projecteurs**? des **symétries**?

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{u \circ v} & & & \\
 E & \xrightarrow{v} & F & \xrightarrow{u} & G \\
 x & \mapsto & v(x) & \mapsto & u(v(x))
 \end{array}$$

$$u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } v \subset \text{Ker } u$$

Homothétie:  
de rapport  $\lambda$

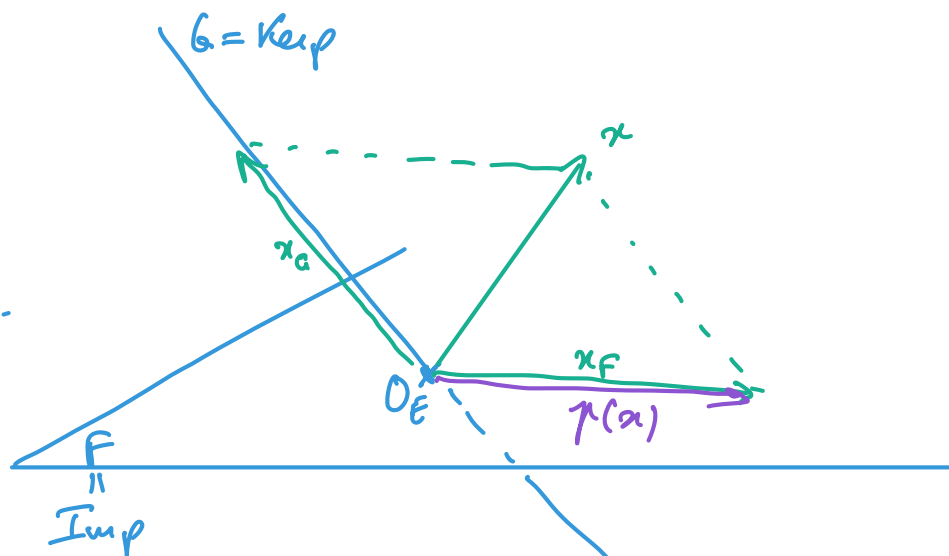
$$\begin{array}{ccc}
 u: E & \longrightarrow & E \\
 x & \longmapsto & \lambda x
 \end{array}$$

$$u = \lambda \text{Id}_E$$

Projecteurs:

$$E = F \oplus G$$

$\uparrow$  projeter  
sur  $F$  de  $G$ .



$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow: E & \longrightarrow & E \\
 x & \longmapsto & x_F \text{ ou } x_F + x_G \text{ et l'autre}
 \end{array}$$

$x \mapsto x_F$  ou  $x_F + x_G$  et l'autre

Caractérisation:  $u \in \mathcal{L}(E)$

$$u \text{ projecteur} \Leftrightarrow u \circ u = u$$

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ si } u \circ u = u$$

alors  $u$  est un projecteur. lequel?

C'est le projecteur sur  $\text{Im } u$ , de direction  $\text{Ker } u$ .

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) \text{ image réciproque de } \{0_F\} \text{ par } u \quad u^{-1}(\{0_F\})$$

$$\text{Im } u = u(E) \text{ image directe de } E \text{ par } u.$$

$$x \in \text{Ker } u \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad \text{facile}$$

$$y \in \text{Im } u \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ tq } y = u(x) \quad \text{difficile}$$

$$u \circ u = u \Leftrightarrow u \text{ projecteur de direction } \text{Ker } u$$

$$\text{sur } \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$$

$$x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$$

$$\Leftrightarrow (u - \text{Id}_E)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) = x$$

$$F' = \text{Im } u = \{ \text{ens ds } x \text{ invariant par } u \}$$

Symétrie

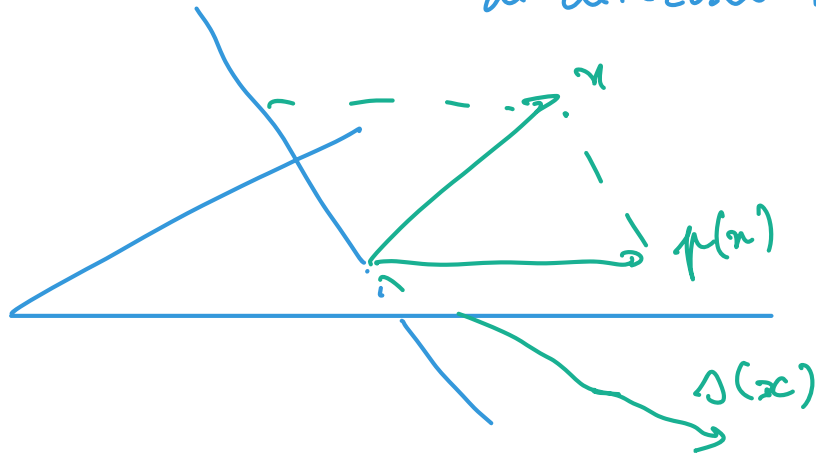
→ cours de 1<sup>re</sup> année

Caract :  $u \circ u = \text{Id}_E$

(\*)

si  $u \circ u = \text{Id}_E$

alors  $u$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$   
de direction  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$



$$2p = \text{Id} + s$$

# 1 Produit et somme d'espaces vectoriels

## 1.1 Produit d'espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois  $+$  et  $\cdot$  définies par :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \\ (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)\end{aligned}$$

où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$ .

$$(E_1, +, \cdot)$$

$$(E_2, +, \cdot)$$

ev sur le m corps  $\mathbb{K}$

On définit

$E_1 \times E_2$  produit cartésien (ensemble)

$$= \{(x_1, x_2) \text{ où } x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$$

On le munit de 1 loi de corp. interne, 1 loi externe

$$+ : (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) \longrightarrow E_1 \times E_2$$

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) \longrightarrow E_1 \times E_2$$

$$\lambda, (x_1, x_2) \longmapsto (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$$

Il reste à vérifier

$(E_1 \times E_2, +)$  groupe commutatif.

$(0_{E_1}, 0_{E_2})$  neutre

et les 4 propriétés des ev.

$$(\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2) \text{ déf.}$$

$$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2) \quad \begin{matrix} E_1 \text{ ev} \\ E_2 \text{ ev} \end{matrix}$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2) \text{ par déf de } +$$

$$= \lambda (x_1, x_2) + \mu (x_1, x_2) \text{ par déf de } \cdot$$

**Proposition.** Muni de ces deux opérations,  $\prod_{i=1}^p E_i$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition.** Lorsque  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimensions finies, notées respectivement  $n_1, \dots, n_p$ , alors  $\prod_{i=1}^p E_i$  est de dimension finie, et sa dimension est  $\sum_{i=1}^p n_i$ .

**Exemple.**  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}^p$  est un espace vectoriel produit sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $p$ .

Soit  $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$  base de  $E_i$

$$\text{On considère } f_j^i = (0_{E_1}, \dots, 0, e_j^i, 0, \dots, 0_{E_p}) \\ \in E_1 \times \dots \times E_p$$

pour  $i \in [1, p]$ ,  $1 \leq j \leq n_i$

La famille  $(f_j^i)_{i,j}$  est une base de  $E_1 \times \dots \times E_p$ :

• linéaire:

Soit  $\lambda_j^i$  des scalaires et

$$\left( \sum_{j,j} \lambda_j^i f_j^i \right) = 0_{E_1 \times \dots \times E_p}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} (0, \dots, 0, \lambda_j^i e_j^i, 0, \dots, 0)$$

$$\sum_{i=1}^p (0, \dots, 0, \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i e_j^i, 0, \dots, 0)$$

$$\left( \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j^1 e_j^1, 0, \dots, 0 \right) + \left( 0, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_j^2 e_j^2, 0, \dots, 0 \right) + \dots$$

$$\left( \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j^1 e_j^1, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_j^2 e_j^2, \dots \right)$$

donc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j^1 e_j^1 = 0_{E_1} \\ \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_j^2 e_j^2 = 0_{E_2} \\ \vdots \end{cases}$$

ie  $\forall i$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i e_j^i = 0_{E_i}$$

$\underbrace{\lambda_j^i}_{\in K} \underbrace{e_j^i}_{\in E_i}$

par liberté de  $B_i$ ,  $\forall j$   $\lambda_j^i = 0$   
généraliser [...]

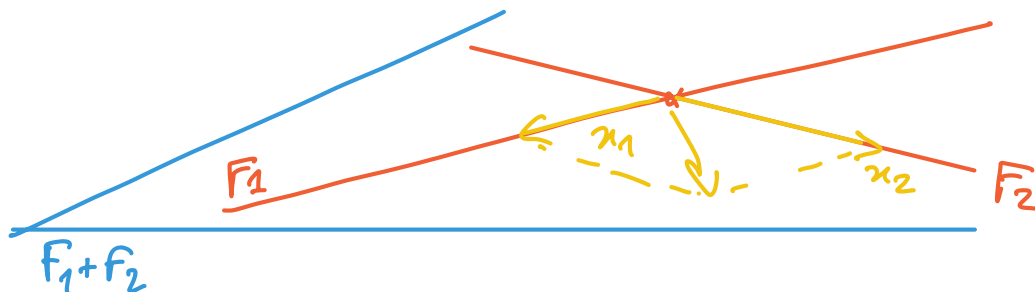
bruf:  $\dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

## 1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}$$

$$x \in F_1 + \dots + F_p \Leftrightarrow$$



**Lemme.** La somme de sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Proposition.** Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \text{Vect} \left( \bigcup_{i=1}^p F_i \right)$$

Preuve du lemme: (notations de la def)

$$\bullet \sum_{i=1}^p F_i \subset E$$

$$\bullet 0_E = 0_E + 0_E + \dots + 0_E \quad \text{or } 0_E \in F_1 \dots 0_E \in F_p \\ \in \sum_{i=1}^p F_i$$

$$\bullet \text{ Soit } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$x, y \in \sum_{i=1}^p F_i$$

$$\text{ic } \exists (x_1 \dots x_p), (y_1 \dots y_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$$

$$\text{tg } x = \sum_{i=1}^p x_i \quad \text{et } y = \sum_{i=1}^p y_i$$

$$\lambda x + \mu y = \lambda \left( \sum x_i \right) + \mu \left( \sum y_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^p \underbrace{\lambda x_i + \mu y_i}_{\in F_i} \quad \text{car } F_i \text{ stable par CL}$$

$$\in \cancel{F_1 + \dots + F_p} \rightarrow F_1 + \dots + F_p$$

Prop:  $\sum_{i=1}^p f_i = \text{Vect} \left( \bigcup_{i=1}^p F_i \right)$

Preuve:  $\boxed{\supset}$   $\forall x, F_i \subset \sum_{i=1}^p F_i$

donc  $\bigcup_{i=1}^p F_i \subset \underbrace{\sum_{i=1}^p F_i}_{\text{stable par CL}}$

donc  $\text{Vect} \left( \bigcup_{i=1}^p F_i \right) \subset \sum_{i=1}^p F_i$

$\boxed{\subset}$  Soit  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$

donc  $\exists (x_1 \dots x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tq  $x = \sum_{i=1}^p x_i$

donc  $x$  est CL de  $x_1 \in F_1 \subset \bigcup_{i=1}^p F_i$

$\vdots$   
 $x_p \in F_p \subset \bigcup_{i=1}^p F_i$

donc  $x \in \text{Vect} \left( \bigcup_{i=1}^p F_i \right)$

### 1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

**Définition.** Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les  $F_i$  **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les  $F_i$  sont en somme directe, on modifie la notation, et on note  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$  pour désigner  $\sum_{i=1}^p F_i$ .

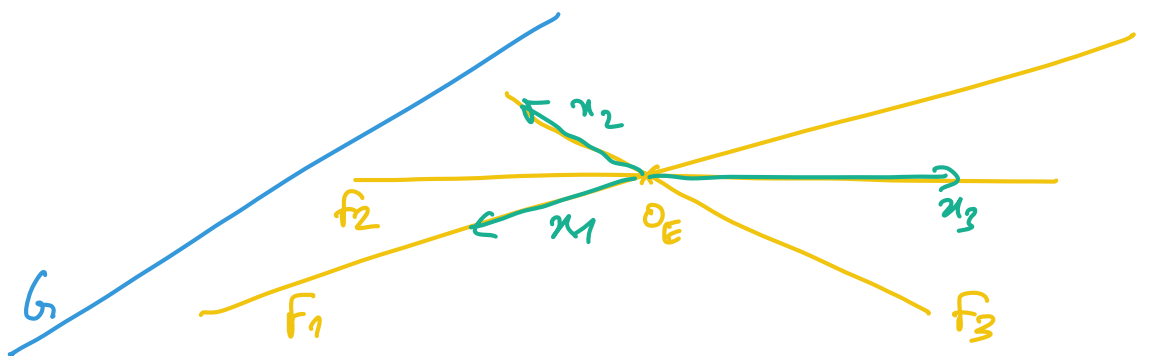
**Remarque.** Ça signifie que la seule façon de construire  $0_E$  comme somme de vecteurs des  $F_i$  est de l'écrire comme somme de  $0_{F_i}$ .

**Remarque.** Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à  $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ . Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.

$\bigoplus_{i=1}^p F_i$  désigne l'ensemble

des - vecteurs qu'on a vérifié qu'ils sont en somme directe.

$$\forall x_1, x_2, x_3 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$



$$G = F_1 + F_2 + F_3$$

~~$$\bigoplus_{i=1}^3 F_i$$~~

~~$$F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$~~

### Théorème.

En conservant les notations précédentes, les  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si tout vecteur  $x$  de  $\sum_{i=1}^p F_i$  se décompose **de façon unique** selon les  $F_i$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^p x_i$$

**Remarque.** Lorsque  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$ , il peut s'écrire  $x = x_1 + \dots + x_p$ . On dit que l'on a écrit une décomposition de  $x$  selon

$\sum_{i=1}^p F_i$ . Si les  $F_i$  sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de **la décomposition de  $x$  selon  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$** .

**Remarque.** On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p F_j \right) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

Preuve:

$\Rightarrow$  On suppose  $F_1 \dots F_p$  en somme directe.

Soit  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$  i.e.  $\exists x_1 \in F_1 \dots x_p \in F_p$  t.q.  $x = \sum_{i=1}^p x_i$

On veut montrer l'unicité de cette écriture.

On suppose que  $x = \sum_{i=1}^p y_i$  où  $y_1 \in F_1 \dots y_p \in F_p$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad 0 &= \sum_{i=1}^p x_i - \sum_{i=1}^p y_i \\ &= \sum_{i=1}^p \underbrace{(x_i - y_i)}_{\in F_i} \end{aligned}$$

donc t.t.  $x_i - y_i = 0$  car les  $F_i$  sont en somme directe.

donc  $x_i = y_i$  unicité

Remarque: Enjeu cette année:

Ainsi à décomposer  $E$  en  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad O_E = O_{F_1} + \dots + O_{F_p}$$

$$\text{Si } O_E = x_1 + \dots + x_p /$$

par unicité de la décomposition,

$$x_1 = 0, \dots, x_p = 0$$

## 1.4 Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe

---

**Proposition.** Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ , on peut définir, pour tout  $i$ , le projecteur  $p_i$  sur  $F_i$  de direction  $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k$ . Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

réfléchir

## 1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  des bases respectives de  $F_1, \dots, F_p$ . On note  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  la concaténation de ces  $p$  bases.

Si les  $F_i$  sont en somme directe, alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ , dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Si on organise et regroupe les vecteurs de  $\mathcal{B}$  de façon à écrire  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ , alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

Prop.  $F_1, \dots, F_p$  sous-espaces de bases respectives  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$   
 $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \Leftrightarrow (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  base de  $E$

Dans ce cas :  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  s'appelle base adaptée à  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$

Preuve :  $\Rightarrow$  Soit  $x \in E$

donc  $\exists! (x_1 \dots x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tq  $x = \sum_{i=1}^p x_i$   
et pour chaque  $x_i$   
 $\exists! \lambda_1^i \dots \lambda_{n_i}^i$  tq  $x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i e_j^i$   
où  $\mathcal{B}_i = (e_1^i \dots e_{n_i}^i)$

donc  $x$  est CL de  $(\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_p)$

mais pas d'unicité.

Montrons plutôt que  $(B_1 \dots B_p)$  lin.

$$\text{Soit } (\lambda_{ij}^i)_{i,j} \text{ tq } \sum_{i,j} \lambda_{ij}^i e_j^i = 0_E$$
$$\sum_{i=1}^p \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}^i e_j^i \right)}_{\in F_i}$$

Comme les  $F_i$  sont en somme directe,

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}^i e_j^i = 0_E$$

$$\text{Par liberté de } B_i, \quad \forall j \quad \lambda_{ij}^i = 0_{K}$$

$\Leftarrow$  On suppose que  $(B_1 \dots B_p)$  base de  $E$ .

$$\text{Mqce } E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$$

---

$$\bullet \text{ Mqce } E = \sum_{i=1}^p F_i$$

---

$\supset$

$\subset$

$$\text{Soit } x \in E$$

$$(B_1 \dots B_p) \text{ base de } E$$

donc  $\exists (\lambda_{ji}^i)_{i,j} \notin$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i,j} \lambda_{ji}^i e_j^i \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ji}^i e_j^i}_{\in F_i} \right) \\ &\in \sum_{i=1}^p F_i \end{aligned}$$

• Après la somme est directe

Soit  $x_1 \in F_1 \dots x_p \in F_p \notin \sum_{i=1}^p x_i = 0$

or  $B_1$  base de  $F_1 \dots B_p$  base de  $F_p$

donc  $\exists \lambda_1^1 \dots \lambda_{n_1}^1 \dots \notin$

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j^1 e_j^1 \quad x_p = \dots$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ji}^i e_j^i = 0$$

or  $(e_j^i)_{i,j}$  libre donc  $\lambda_{ji}^i = 0 \forall i,j$

donc en part  $x_1 = 0 \dots x_p = 0$

### Théorème.

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de dimension finies de  $E$ . Alors on a :

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les  $F_i$  sont en somme directe.

Preuve:

e.v. muni de la structure produit  
↓  
Notons  $\phi : \prod_{i=1}^p F_i \longrightarrow \sum_{i=1}^p F_i$  ← sous.-ev de  $E$   
 $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 + \dots + x_p$

$\phi$  est bien définie

↳ sans ambiguïté

↳ bien à valeurs dans  $\sum_{i=1}^p F_i$

$\phi$  est linéaire

$$\begin{aligned} & \phi(\lambda(x_1 \dots x_p) + \mu(y_1 \dots y_p)) \\ &= \phi(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p) \\ &= \lambda x_1 + \mu y_1 + \dots + \lambda x_p + \mu y_p \\ &= \lambda \phi(x_1 \dots x_p) + \mu \phi(y_1 \dots y_p) \end{aligned}$$

$\phi$  est surjective

Euh... ben oui, par def de  $\sum F_i$

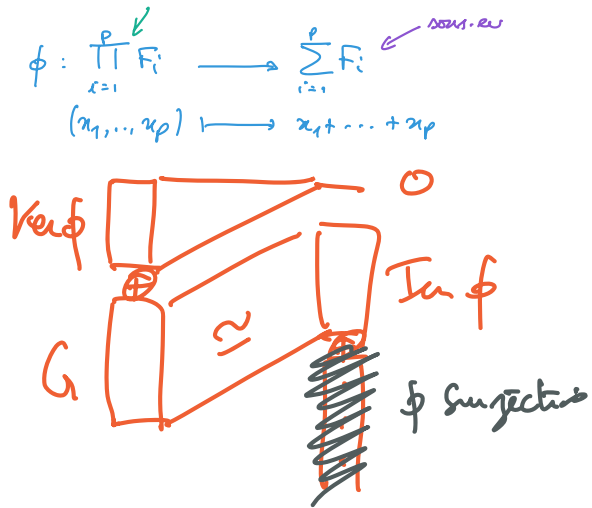
$\phi$  est injective ?

$$(x_1, \dots, x_p) \in \ker \phi \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_p = 0_E$$

$$\phi \text{ injective} \Leftrightarrow \ker \phi = \{0, \dots, 0\}$$

$\Leftrightarrow$  le seul  $(x_1 \dots x_p)$  tq  $x_1 + \dots + x_p = 0$   
est  $(0, \dots, 0)$

$\Leftrightarrow F_1 \dots F_p$  est en somme directe.



$$\dim \sum F_i = \dim \operatorname{Im} \phi$$

$$= \dim \prod F_i - \dim \operatorname{Ker} \phi$$

(th du rang)

$$\leq \dim \prod F_i$$

avec égalité ssi  $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$

si les  $F_i$  sont en somme directe.

## 1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

cf 1<sup>re</sup> année

**Définition.** Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits **supplémentaires** dans  $E$  si et seulement si  $E = F \oplus G$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

**Exemple.** Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exemple.** On note  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Rappel.** Caractérisation par décomposition unique.

En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.

En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

**Définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ . On appelle **base de  $E$  adaptée à  $F$**  toute base de  $E$  obtenue en complétant une base de  $F$  en une base de  $E$ .

**Remarque.** Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.

**Rappel.** Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

(11)  $\tau: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \mapsto M^T$$

tg  $\tau \circ \tau = \text{Id}$  donc  $\tau$  est une symétrie,

par rapport à  $\text{Ker}(\tau - \text{Id})$

de direction  $\text{Ker}(\tau + \text{Id})$

$$\text{donc } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \underbrace{\text{Ker}(\tau - \text{Id})}_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \oplus \underbrace{\text{Ker}(\tau + \text{Id})}_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

$$M \in \text{Ker}(\tau - \text{Id}) \Leftrightarrow \tau(M) = M$$

$$\Leftrightarrow M^T = M$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

(12) Introduction :

$$S_{ij} = \begin{cases} E_{ij} + E_{ji} & i < j \\ E_{ii} & i = j \end{cases}$$

$$A_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad i < j$$

Bref

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} & i & & j \\ (0) & & +1 & \\ & -1 & & (0) \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

- $\forall i, j \quad S_{ij} \text{ et } S_{ii} \in S_n(\mathbb{R})$

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (S_{ij}, S_{ii})_{i,j} \text{ libre car échelonnée.}$$

- $\forall i, j \quad A_{ij} \in A_n(\mathbb{R})$

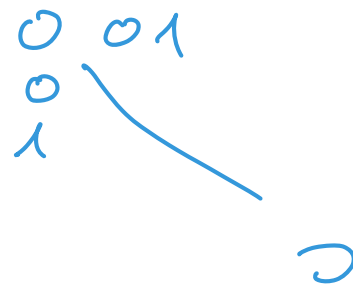
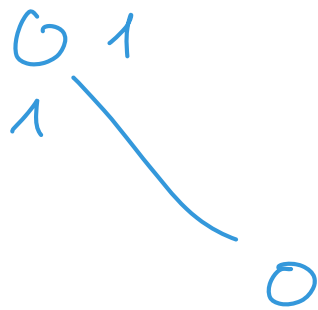
$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (A_{ij})_{i,j} \text{ libre}$$

- [...]  $(S_{ij}, S_{ii}, A_{ij})$  libre  
il y en a  $n^2$

→ donc base de  $M_n(\mathbb{R})$

donc  $\text{Vect}(S_{ij}, S_{ii}) \oplus \text{Vect}(A_{ij}) = M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{matrix} \text{[...] } \downarrow & \downarrow \\ S_n(\mathbb{R}) & A_n(\mathbb{R}) \end{matrix}$$



$$\left( (S_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}, (S_{kk})_{1 \leq k \leq n} \right)$$

































