

Colloscope version beta

pour me: 210.1, 210.3, 520.2

À propos des ex à rédiger: PDF, manuscript

2027 MPI/MPI*

210

Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel**? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne représentation géométrique des espaces vectoriels?

① ensemble structuré par une loi $+$ et loi $\cdot$.

stable par C.L

loi de comp interne

$$+ E \times E \rightarrow E$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

loi externe

$$\cdot \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$
$$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

scalaire vector

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corps

Def: $(E, +)$ groupe commutatif.

la loi $+$ et

la loi $\cdot$ sont

"cohérentes".

$\forall \lambda, \mu \in K$

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$\forall x, y \in E$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$$

$$(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$1 \cdot x = x$$

Pour que E est un ev :

on montre que c'est un sous-ev d'un

"gros" ev comm. :

| inclut
| non vide car contient 0
| stable par $\cdot$

E.vecto cours: $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

$$\mathbb{K}_3[X]$$

$$\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$$

$$\mathbb{K}^n \quad \mathcal{B}(A, \mathbb{K}) = \{ \text{fct bornées} \}$$

$$S_H \quad \text{sol d'EDL}_1 \quad [\dots]$$

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K}) \quad \mathcal{T}_n^S(\mathbb{K})$$

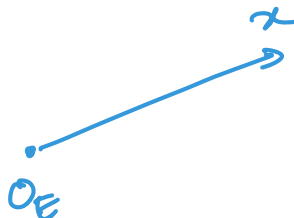
$$\mathcal{L}(E, F)$$

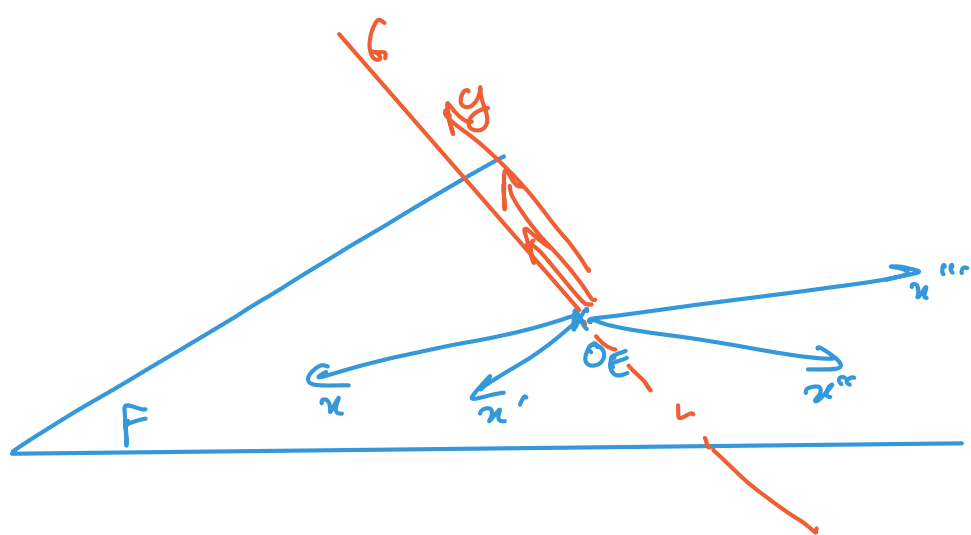
$$\mathbb{K}, \mathbb{K}^3 \dots$$

③ Vision géom droite, plan, espace, ~~partielle~~ pas stable par ci
 $x \in E$

x vecteur

représenté par une flèche issue du vecteur nul





4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux?
5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels?

④ • 1 inclusion et égalité des dim finies

- double inclusion

$$\boxed{\subseteq}$$

$$\boxed{\supseteq}$$

- même famille génératrice / base

⑤ Union de 2 sous-ev n'est pas un ev.

(sauf si la réunion est l'un des 2 ev)

Intersection : oui

⑥ Somme de 2 sous-ev ?

F, G sous-ev d'un même ev

On définit

$$F + G = \{ x + y, x \in F \text{ et } y \in G \}$$

$$z \in F + G \Leftrightarrow \exists x \in F \exists y \in G \text{ tq } z = x + y$$

7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire**?
8. Qu'est-ce qu'une famille libre? Y a-t-il des familles automatiquement libres?
9. Qu'est-ce qu'une famille liée? Y a-t-il des familles automatiquement liées?

Une C.L de (x_i) est $\lambda x + \mu y$ où $\lambda, \mu \in K$

Une CL de $(x_i)_{i \in [0, m]}$ est $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in K$

Une CL d'une famille infinie

est une CL d'une sous-famille finie

Une CL de $(x_i)_{i \in I}$ est $(I \text{ infini})$

le choix de $J \subset I$ une partie finie

le choix de $(\lambda_j)_{j \in J}$ scalaire

la CL $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$

Famille libre:

$(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ libre signifie

$$\left[\forall \lambda_i \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0 \right]$$

Pour une $(x_i)_i$ est libre :

$$\text{Soit } \lambda_0, \dots, \lambda_n \text{ tq } \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0$$

[...]

$$\lambda_0 = 0 \dots \lambda_n = 0$$

Donc la famille est libre.

$$\begin{array}{c} (x_i)_{0 \leq i \leq n} \text{ libre signifie} \\ \hline \left[\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0 \right] \end{array}$$

on utilise la liberté comme de $(x_i)_i$

il faut avoir une CL nulle des x_i

$(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ libre signifie

Si une CL finie des x_i est nulle

alors tous les coeff sont nuls

liée...

10. Que désigne la notation $\text{Vect}(A)$?
11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?
12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?
13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?

A partie de E en

$\text{Vect}(A) =$ plus petit sous-espace de E contenant A

$$= \bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace de } E \\ A \subset F}} F$$

$$= \{ \text{CL finie des éléments de } A \}$$

caractérisation

$$x \in \text{Vect } A \iff \exists m \exists \lambda_1 \dots \lambda_m \in K \exists a_1 \dots a_m \in A$$

$$\text{tg} \quad x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

$$\forall x, y \in E$$

on prend 2 vecteurs

$$\forall (x, y) \in E^2$$

1 couple de vecteurs.

~~base canonique~~ = base jolie = celle à laquelle tout le monde pense

$\mathbb{R}^3 \quad e_1(1, 0, 0) \quad e_2(0, 1, 0) \quad e_3(0, 0, 1)$

$$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$\mathbb{K}_3[X] \quad (1, X, X^2, X^3)$$

$$a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

$$\text{coord} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3$$

$$\text{a pair coord} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{with } i \text{ and } j \text{ indicating the row and column of the 1's}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a pair coord} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ can have canonical}$$

14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann.

Dans E eu de dim fini

(14) Toute famille liné se complète en une base.

C'est un "début de base"

(15) De toute famille génératrice on peut extraire une base

Il ya amg de vecteurs

base.

$\underbrace{\times \times \times \times \times}_{\text{liné}} \underbrace{\times \times \times \times}_{\text{génératrice}}$

base

$\underbrace{\times \times \times \times \times}_{\text{liné}} \underbrace{\times \times}_{\text{génératrice}}$

Soit $I \subset J$

$(x_i)_{i \in I}$ liné et $(x_i)_{i \in J}$ génératrice,

$\exists K \subseteq I \subset K \subset J$ $\{ (x_i)_{i \in K}$ base.

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme**?
D'autres termes dans le même contexte?

$$u: E \longrightarrow F \quad E, F \text{ ev}$$

Une application linéaire est linéaire ie respecte les CI

$$\begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall x, y \in E \end{array} \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

endomorphisme "de E dans E"

Que: $u: E \longrightarrow E$ est un endomorphisme.
 $x \mapsto u(x)$

- linéarité: $\forall \lambda, \mu \forall x, y \quad u(\lambda x + \mu y) = \dots$
- stabilité de E par u

$$\forall x \in E, u(x) \in E$$

isomorphisme = application linéaire bijective

automorphisme = endomorphisme bijectif.

forme linéaire = application linéaire à valeurs dans K

$$u: E \longrightarrow K$$

18. Qu'est-ce que le **noyau** de u , à quoi sert-il?

19. Qu'est-ce que l'**image** de u , comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle?

20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?

$$u : E \longrightarrow F \quad u \in \mathcal{L}(E, F)$$

$x \quad \cdots \cdots \cdots \rightarrow \quad y$

$$\text{Ker } u = \{ x \in E, \text{ tq } u(x) = 0_F \}$$

$$\text{Im } u = \{ y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x) \}$$

$$\text{Ker } u = \{ 0_E \} \Leftrightarrow u \text{ injectif}$$

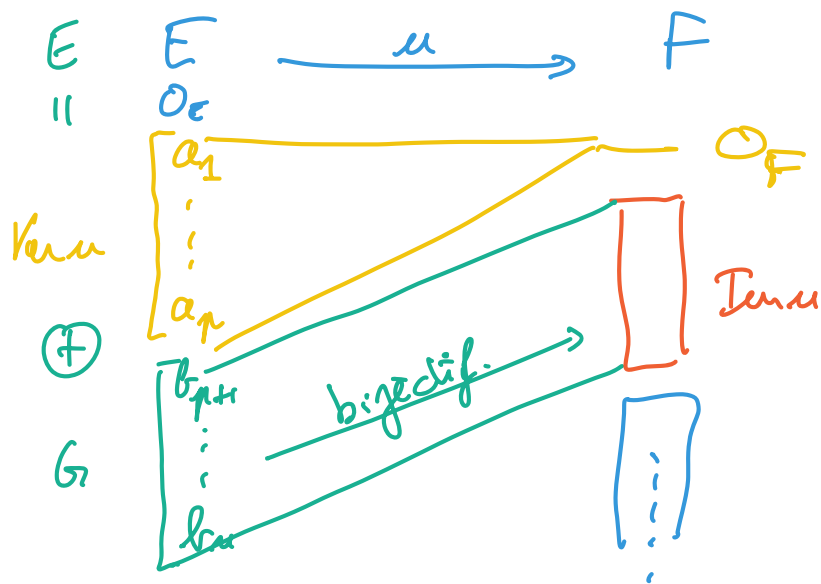
"La taille de $\text{Ker } u$ mesure le défaut d'injectivité".



$$B = (e_1 \dots e_n) \text{ base de } E$$

Définir u , c'est donner $u(e_1) \dots u(e_n)$

$$\text{Si } x \text{ a pour coord } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u(x) = u(\sum x_i e_i) = \sum x_i u(e_i)$$



$\text{Ker } u$ sous-esp de E

Soit $(a_1, \dots, a_p)$ base de $\text{Ker } u$

Par le th de la base incomplète, on complète en

$(a_1, \dots, a_p, b_{p+1}, \dots, b_n)$ base de E

Soit G tq. $\text{Ker } u \oplus G = E$

Definir $v: G \longrightarrow \text{Im } u$ bijection
 $x \longmapsto u(x)$

• Soit $x \in G$ tq $v(x) = 0$ (mqc $\text{Ker } v = \{0\}$)

ie $u(x) = 0$ ie $x \in \text{Ker } u$

or $\text{Ker } u \oplus G$ donc $x = 0$

Ainsi v est injective

• Soit $y \in \text{Im } u$

donc $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

or $E = \text{Ker } u \oplus G$

donc $\exists k \in \text{Ker } u, \exists t \in G$ tq

$$x = k + t$$

Alors $y = u(k + t)$

$$= u(k) + u(t)$$

$$= 0 + u(t)$$

$$= u(t) \in \text{Im } u$$

Donc u surjectif.

21. Que signifie $u \circ v = 0$?
22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?
23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \\ (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)\end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod_{i=1}^p E_i$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \dots, n_p$, alors $\prod_{i=1}^p E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum_{i=1}^p n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p .

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^p F_i \right)$$

1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition. Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les F_i **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les F_i sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ pour désigner $\sum_{i=1}^p F_i$.

Remarque. Ça signifie que la seule façon de construire 0_E comme somme de vecteurs des F_i est de l'écrire comme somme de 0_{F_i} .

Remarque. Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.

Théorème.

En conservant les notations précédentes, les F_i sont en somme directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum_{i=1}^p F_i$ se décompose **de façon unique** selon les F_i , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i, \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^p x_i$$

Remarque. Lorsque $x \in \sum_{i=1}^p F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \dots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de x selon $\sum_{i=1}^p F_i$. Si les F_i sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de **la décomposition de x selon $\bigoplus_{i=1}^p F_i$** .

Remarque. On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p F_j \right) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

1.4 Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe

Proposition. Si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, on peut définir, pour tout i , le projecteur p_i sur F_i de direction $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k$. Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

Proposition. Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces p bases.

Si les F_i sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

Théorème.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de E . Alors on a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.

1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappel. Caractérisation par décomposition unique.

En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.

En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p .

On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E .

Remarque. Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.

Rappel. Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

