

4 Règle de d'Alembert

qui ne s'applique presque jamais

Remarque. Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Rmq:

• Pour étudier $\sum u_n$,

on compare le tg au tg d'une série de référence.
(on étudie la cv absolue)

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ cv absolue} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\sum q^n \text{ cv absolue} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\left(\sum \frac{x^n}{n!} \text{ cv absolue} \right)$$

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x| \dots |x|}{1 \times 2 \dots \times n}$$

$$u_{n+1} = \frac{|x| \dots |x|}{1 \times 2 \dots \times n} \times \frac{|x|}{(n+1)}$$

$$\leq u_n \quad q$$

pour $n \geq N$

$$q = \frac{|x|}{n+1}$$

$$u_n \leq u_N q^{n-N} \quad \text{par ric}$$

$\uparrow$
 lg série cv si $q < 1$

Règle de d'Alembert

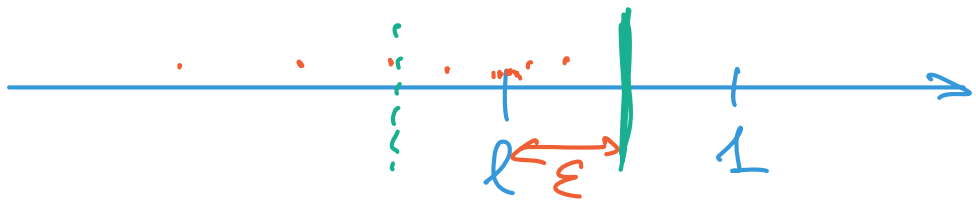
On étudie $\sum u_n$ où u_n ne s'annule pas,
 On peut essayer de comparer u_n à une série géom
 en envisageant $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ et en espérant avoir
 une limite finie $l \neq 1$.

• Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{+\infty} 1$ ou si pas de limite,
 on ne peut rien dire.

• Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{+\infty} l < 1$
 Alors $\sum u_n$ cv absolument

• Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow l > 1$
 alors $\sum u_n$ div géométr.

Preuve: On suppose $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1$



par def de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

donc $\exists N \forall n \geq N \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1+l}{2}$
noté $q < 1$

par réc, $|u_n| \leq |u_N| q^{n-N}$
↑ t.g d'une série
généralisée convergente

Donc $\sum u_n$ cv absolument.

Def: $\forall z \in \mathbb{C}, \sum \frac{z^n}{n!}$ conv absolument.

On définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

"série exponentielle"
série de rif.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

