

Pour re: 510.13 - 510.20

520.1 - 520.3

Pour le 7^h00 Au moins un exercice à rédiger
1 fichier.

610.20



610.20

610.21

610.22

510.15

510.16

<http://envoi.lamartin.fr>

Envoi d'un devoir ou d'un exo

Sélection du fichier à envoyer

Choisir le fichier : aucun fichier sélectionné
Merci d'uploader le format PDF.

Pour qui ?

Guillaume Labarre 0

Identité

Nom :

Prénoms :

Quel :

Message éventuel :

Soyez patient

[Choisissez le fichier](#)

et ne fermez pas la fenêtre avant le message vert indiquant que le téléchargement a bien eu lieu.
En fonction de la qualité de votre connexion, cela peut prendre plusieurs minutes.

Contact : ghabierre@lamartin.fr Dernière mise à jour le 3 septembre 2024.

MPI* La Martin Organisation Mathématiques Physique Informatique Français TIPE

GitHub prepas.org SCEI

Mathématiques - les polys

Envoi de documents

Suivre ce lien pour envoyer des documents de mathématiques

Les polys de cours

Les liens seront actifs au fur et à mesure de l'avancée du cours.

1. Algèbre générale

	MPI	MPI*
Compléments sur les groupes	110	110
Groupes cycliques	111	111
Anneaux	120	120

Envoi de documents
Les polys de cours
1. Algèbre générale
2. Algèbre linéaire et réduction
3. Algèbre bilinéaire
4. Topologie des ensembles
5. Analyse discrète
6. Analyse continue
7. Calcul différentiel
8. Probabilités
Les exercices de la banque CCNP
Le programme officiel

2027 MPI*

520

Séries numériques

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?

① une suite dont le t.g. est ~~$\sum_{k=1}^n u_k$~~

Déf. Une série est un t.ruc qui a un t.ruc général.^{t.g.}

série $\sum u_n$ la série "le t.ruc" notée parfois $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$

$\sum_{k=0}^n u_k$ une somme partielle

suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles

nombre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série notée parfois ~~$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$~~

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ notation des familles sommables.

3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?

4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?

$\sum u_n$ div grossièrement signifie $u_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$

Propriété: Si $\sum u_n$ converge

Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

④ Étudier $\sum u_n$, c'est savoir si elle converge

(et par calculs sa somme sauf si explicitement demandé)

5. Le cas de la série géométrique ?

6. Le cas des séries de Riemann ?

• $\sum a q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ($q \in \mathbb{C}$)

dans ce cas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a q^n = a \frac{1}{1 - q}$$

• $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ série de Riemann

Converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?

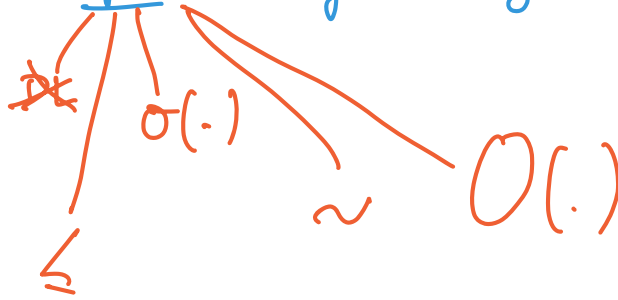
$(u_n)_n$ convergente $\Leftrightarrow \sum u_{n+1} - u_n$ converge

Preuve: $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$

8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?

- $\sum \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)}_{\text{t.g}}$

Peut-on comparer le t.g. au t.g. d'une série de référence ?



$$\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \underset{t.g.}{\sim} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\underset{t.g.}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

t.g. série positive
de Riemann convergente

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ cv

- Revenir à l'étude de la suite des sommes partielles

* Cas sin / intégrale

* Comme $u_n \geq 0$ on, $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_n$ est croissante

on peut chercher à la majorer.

9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

- Étude de la cv absolue

$$\sum u_n \text{ cv absolu} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

signifie

$$\sum |u_n| \text{ converge}$$

- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $\sum v_n$ cv absolu
alors $\sum u_n$ cv absolu, donc converge

- Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ cv absolu
alors $\sum u_n$ cv absolu

- Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ cv absolu

.....

- Si $|u_n| \leq |v_n|$ et $\sum v_n$ cv absolu
alors $\sum u_n$ cv absolu.

- Étudier $\sum (-1)^n u_n$ où $(u_n)_n$ positive, décroissante de limite nulle

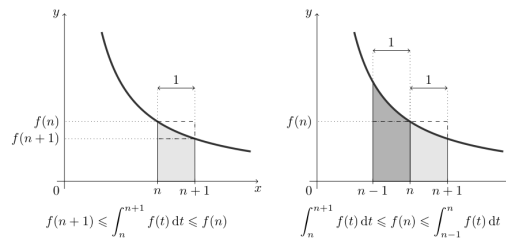
on peut appliquer le th des séries alternées.

1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

• Encadrements élémentaires : par décroissance de f , on a :



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_1^A \frac{1}{t^2} dt \quad \xrightarrow{A \rightarrow +\infty}$$

intégrale particulière
de l'intégrale généralisée

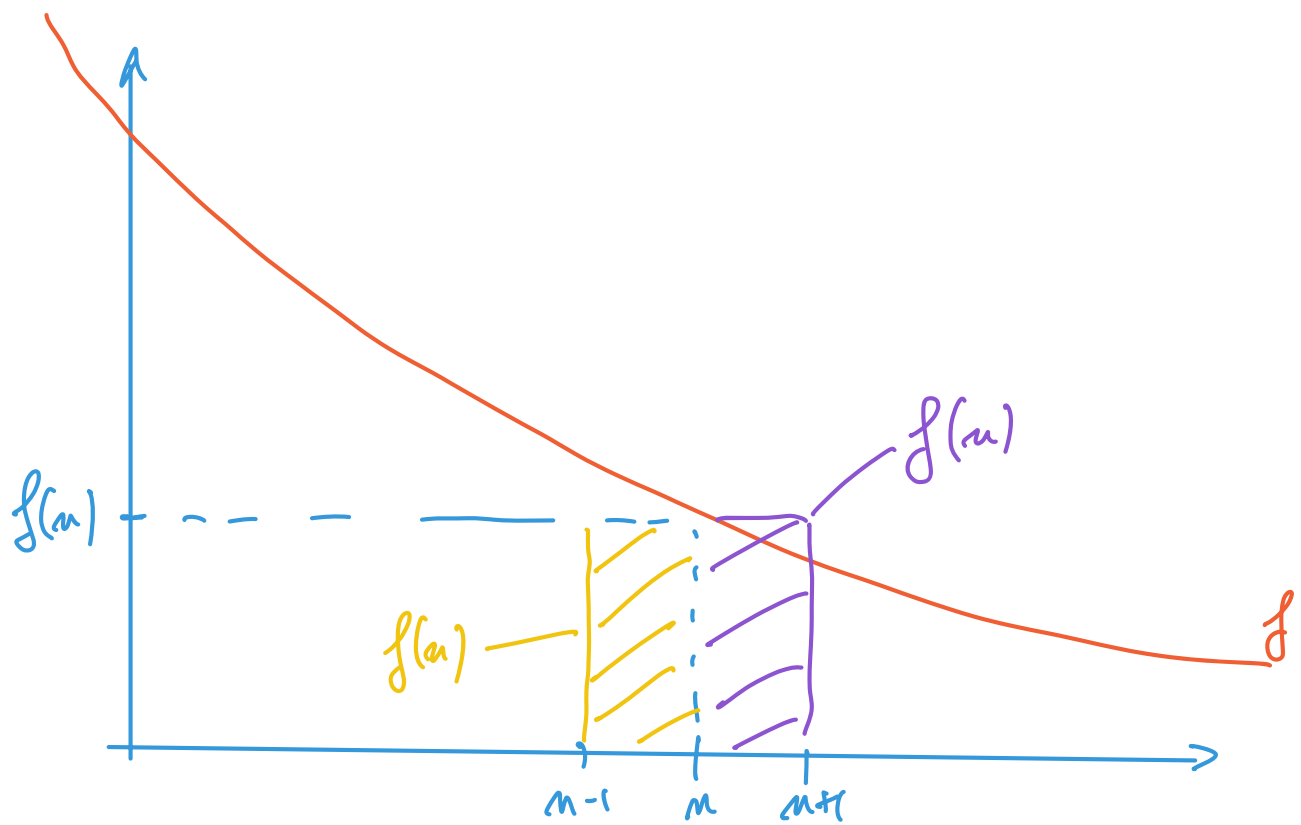
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

Transforme une étude de série en une intégrale

le fond (primitive)

Int par parties

changeant de variable



Par décroissance def:

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

Encadrons la suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^N f(n)$

$$\int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(t) dt$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge.
- Si l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

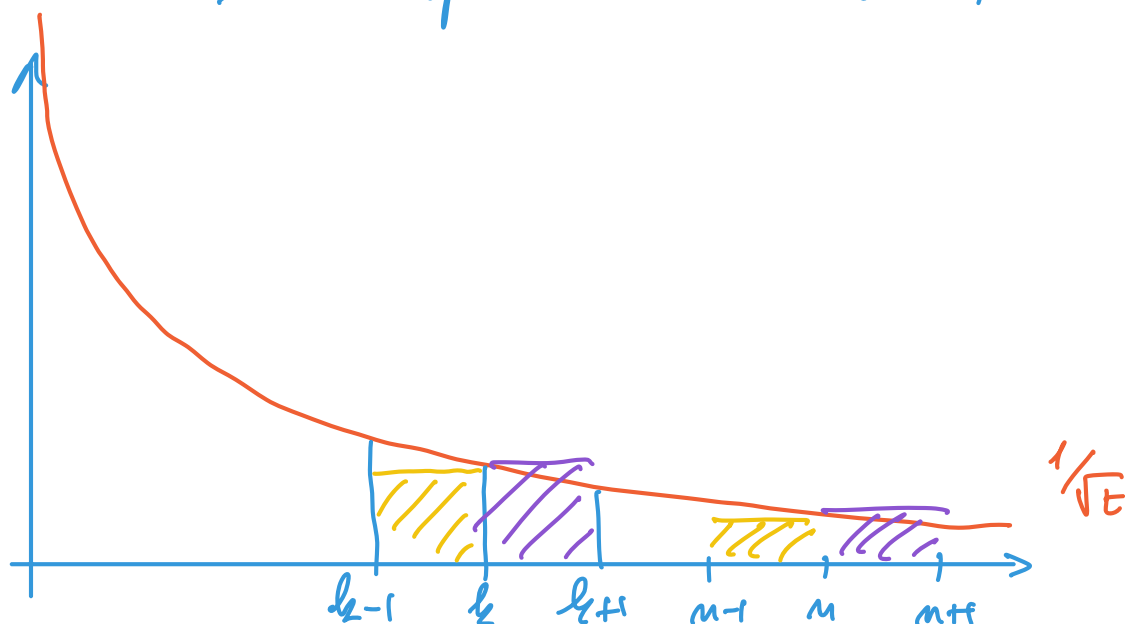
$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

Rang: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann,
avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
Son t.g. est positif, donc la
suite des sommes partielles tend vers $+\infty$



Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante, par

comparaison somme/intégrale :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\left[2\sqrt{t} \right]_1^{n+1}$$

$$\left[2\sqrt{t} \right]_0^n$$

Bof bof
 $t \mapsto 2\sqrt{t}$
 $\in \mathcal{O}_m[0, n]$
Faux...

$$\frac{2\sqrt{u+1} - 2}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{11}{2\sqrt{n}}$$

Par encadrement, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim_{+0} 2\sqrt{n}$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\frac{1 + 2\sqrt{n} - 2}{2\sqrt{n}}$$

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

[520.8]

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

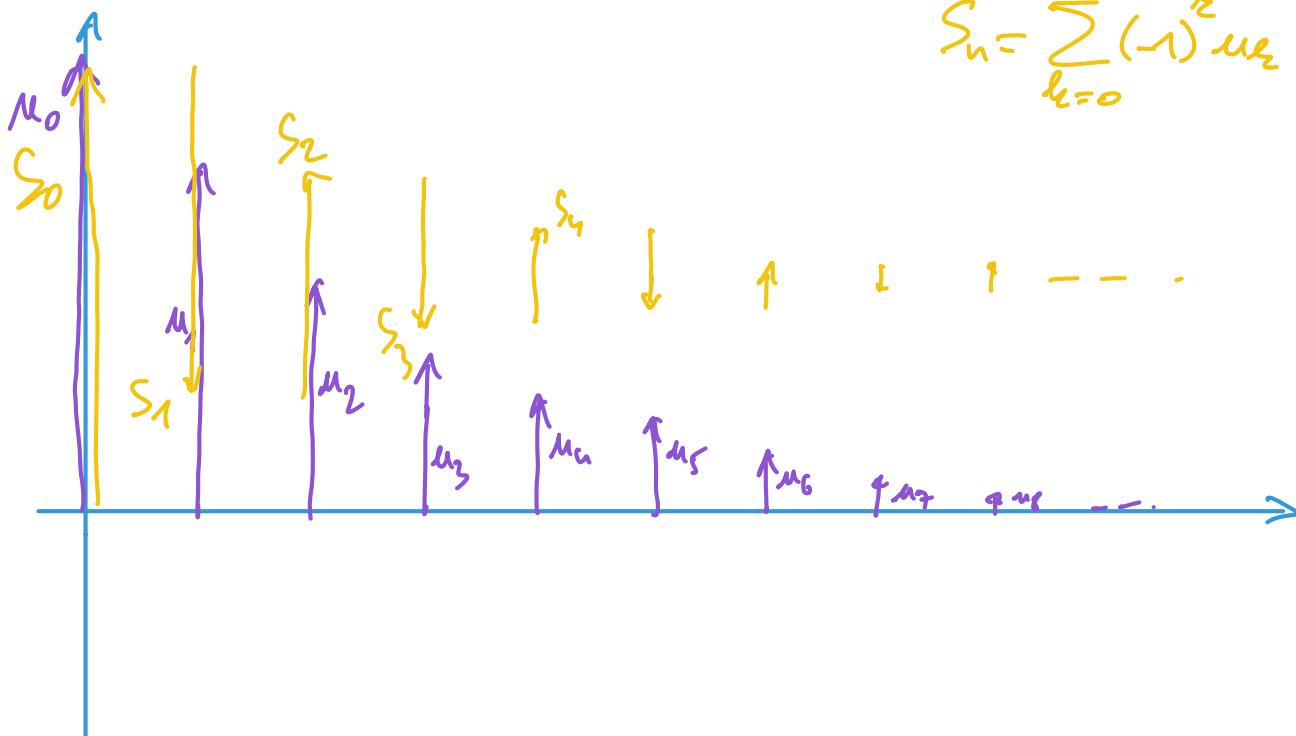
Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n , le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

estimation de l'erreur commise

en calculant $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$



Remarque. Le théorème s'applique aussi à $\sum (-1)^{n+1} u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Remarque. Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$?

Étudier
$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$$

$$(-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}} \sim (-1)^n \frac{1}{n}$$

mais : pas de ce absolu

pas de ce par équivalence.

Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$$

} factoriser par le
terme qui prédomine

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{w_n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{z_n}$$

$\sum v_n$ converge (série harmonique alternée)

$\sum w_n$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$)

$\sum z_n$ converge **absolument**, par comp à $\sum \frac{1}{n^2}$

Donc $\sum u_n$ cv comme somme de 3 séries cv.

12 $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$

$$\frac{1}{1+n} = 1 + O(n)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{z_n}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv et $\sum z_n$ cv absolument par comp.
donc $\sum u_n$ converge.

Et à celle de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$?

Avec
dér

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

pas de valeur

→ éclatement.

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)_{u \rightarrow 0}$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{w_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{x_n}$$

$\sum v_n$ converge (Riemann alternée)

$\sum w_n$ diverge (Série harmonique)

$\sum x_n$ car converge absolument

(Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

Donc $\sum u_n$ diverge