

ben je 610.2
610.9
510.4

Validation aduune mail.

Exercices de la banque CCINP

510.5

43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

2027 MPI*

510

Suites numériques

1.1 Récurrence

- Raconter ce qu'est une récurrence.
- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

Ric = mode de raisonnement

└ initialisation au rang 0

└ hérédité vrai à $n \Rightarrow$ vrai à $n+1$

CCf : prop vraie pour tout $n \geq 0$

Récurrence double

P_0 vraie

P_1 vraie

P_n vraie $\forall n \geq 0$

$\forall n \geq 0 \quad P_n \wedge P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$

$\forall n \geq 2 \quad P_{n-1} \wedge P_{n-2} \Rightarrow P_n$

Récurrence forte

P_0

$\forall n \geq 0 \quad \left(\forall k \in [0, n-1] \quad P_k \right) \Rightarrow P_n$

P_n vraie $\forall n \geq 0$

Rang: réfléchir à ce qui est important (réduction)
(raisonnement)

clé: quelle est la relation de récurrence

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

Rel de réc.

$$\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x$$

$$\cos((n-1)x) = \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x$$

$$\boxed{\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos x - \cos((n-1)x)}$$

rel de récurrence double!

Raisonnons par récurrence double:

- $\cos(0x) = 1$

$$= T_0(\cos x) \quad \text{en posant } T_0 = 1$$

- $\cos(1x) = T_1(\cos x) \quad \text{---} \quad T_1 = X$

- Soit $n \geq 1$

On suppose qu'il existe T_n et T_{n-1} polynômes

$$\forall x \quad \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

$$\cos((n-1)x) = T_{n-1}(\cos x)$$

Alors:

$$\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos x - \cos((n-1)x)$$

$$= 2T_n(\cos x)\cos x - T_{n-1}(\cos x)$$

per H.R.

$$= T_{n+1}(\cos x)$$

as given $T_{n+1}(x) = 2T_n(x)x - T_{n-1}(x)$

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

Ans:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists T_n \in \mathbb{R}[x] \text{ s.t. } \forall x \quad \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?
5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.

suite
"

application $\mathbb{N} \rightarrow E$
 $n \mapsto u_n = u(n)$

numérique

$E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

suites de fonctions

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
 $n \mapsto \left(f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right.$
 $\quad \quad \quad x \mapsto f_n(x) \left. \right)$

(1, 2)

(1, 1)

comple

suite = $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n, u_n \in \mathbb{R}$

= $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots)$

Définir une suite :

① On pose: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$

explicit

② On pose: $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{array} \right\}$

par récurrence
simple

③ $\forall n \in \mathbb{N}, x_n$ est l'unique réel dans $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$

tel que $\tan(x_n) = u_n$ def implicite

6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?
7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?
8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?

⑥

$$\exists l \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

↑
tolérance
à partir d'un
certain rang
distance

$(u_n)_n$ ne converge pas

signifie: $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| > \varepsilon$

$\exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \text{et pourtant} \quad |u_n - l| > \varepsilon$

⑦ Si $(u_n)_n$ converge alors $(u_n)_n$ est bornée

Preuve:

Soit $(u_n)_n$ qui converge vers l

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \right)$$

par déf de limite avec $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| \leq 1$$

th

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - l + l| \\ &\leq |u_n - l| + |l| \end{aligned}$$

Par def de limite avec $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| \leq 1$$

$$\text{Donc } \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq 1 + |l|$$

$$\text{Donc } \forall n \quad |u_n| \leq \underbrace{\max(1 + |l|, |u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|)}_{\text{indép de } n}$$

9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire?
10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$?
11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?

9) $(u_n)_n$ stationnaire :

$$\exists u_0 \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

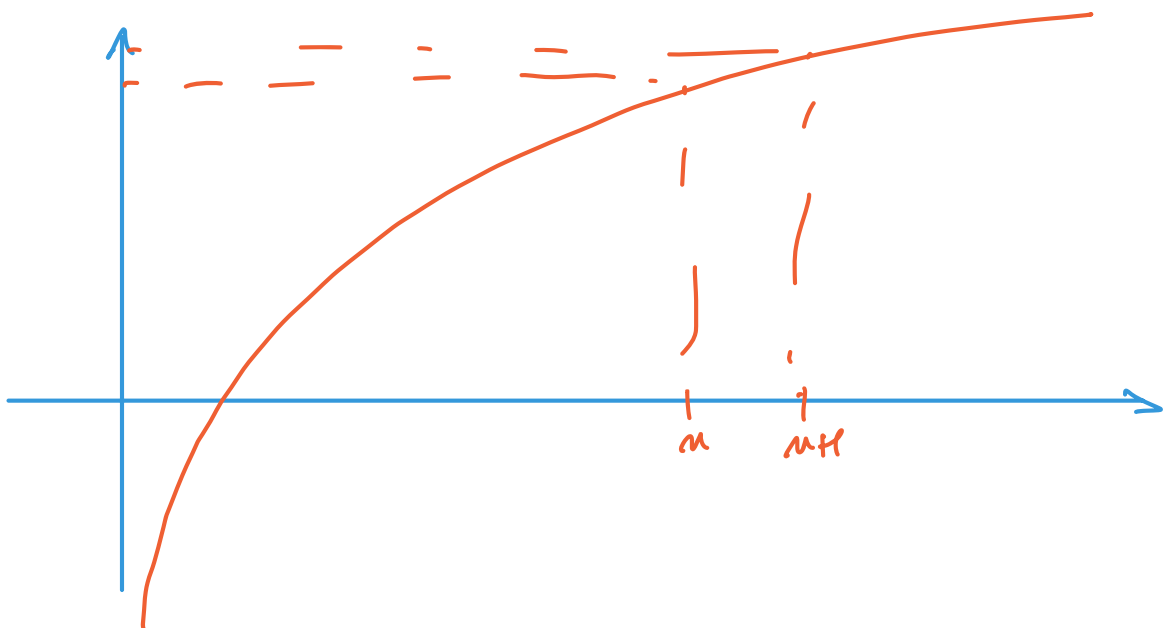
Non

Seul si $(u_n)_n$ est une suite d'entiers

10) Non

$\Rightarrow$ oui

$\Leftarrow$ Non



$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \quad \text{DL}$$

$$= \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.
13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?
14. Que signifie « étudier une suite » ?
15. Citer le « théorème de convergence monotone ».
16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

⑬ Si $\forall n \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

$$u_n \xrightarrow{+\infty} l$$

$$w_n \xrightarrow{+\infty} l$$

Alors $v_n \xrightarrow{+\infty} l$

Autre formule :

Si $|u_n - l| \leq v_n$

$$v_n \rightarrow 0$$

Alors $u_n \rightarrow l$

⑭

"Étudier une suite"

→ est-elle convergente ?

Si possible, donner sa limite

"Étudier une fonction"

→ Tableau de
variations

- (15) Si $(u_n)_n$ est croissante majorée,
alors $(u_n)_n$ converge

Intérêt !

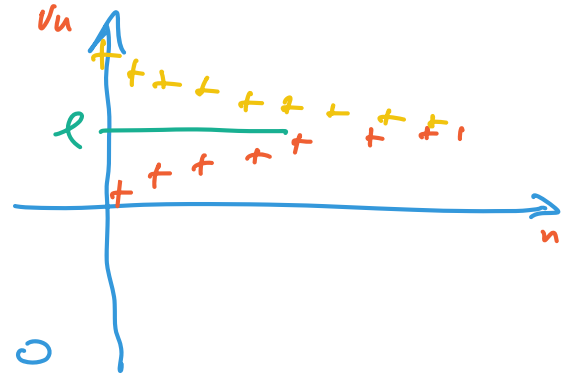
les de connaissance à priori de l .

- (16) Déf
 (u_n) et (v_n) adjacentes

lorsque $(u_n) \nearrow$

$(v_n) \searrow$

$$v_n - u_n \xrightarrow{+\infty} 0$$



th des suites adjacentes

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ adjacentes

alors elles ont une même limite
en l'encadrant.

Intérêt : lien des th des suites alternées.

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

Dans $\mathbb{R}$

24. Qu'est-ce qui permet d'assurer l'existence d'une borne supérieure?

25. Ça veut dire quoi, $\text{Sup } A \leq 3$?

Th Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée
admet une borne sup.

$A \subset \mathbb{R}$

$$\text{Sup } A \leq 3$$

$$\forall a \in A, a \leq 3$$

$\text{Sup } A$ = le plus petit des majorants.

1.4 Suites récurrentes

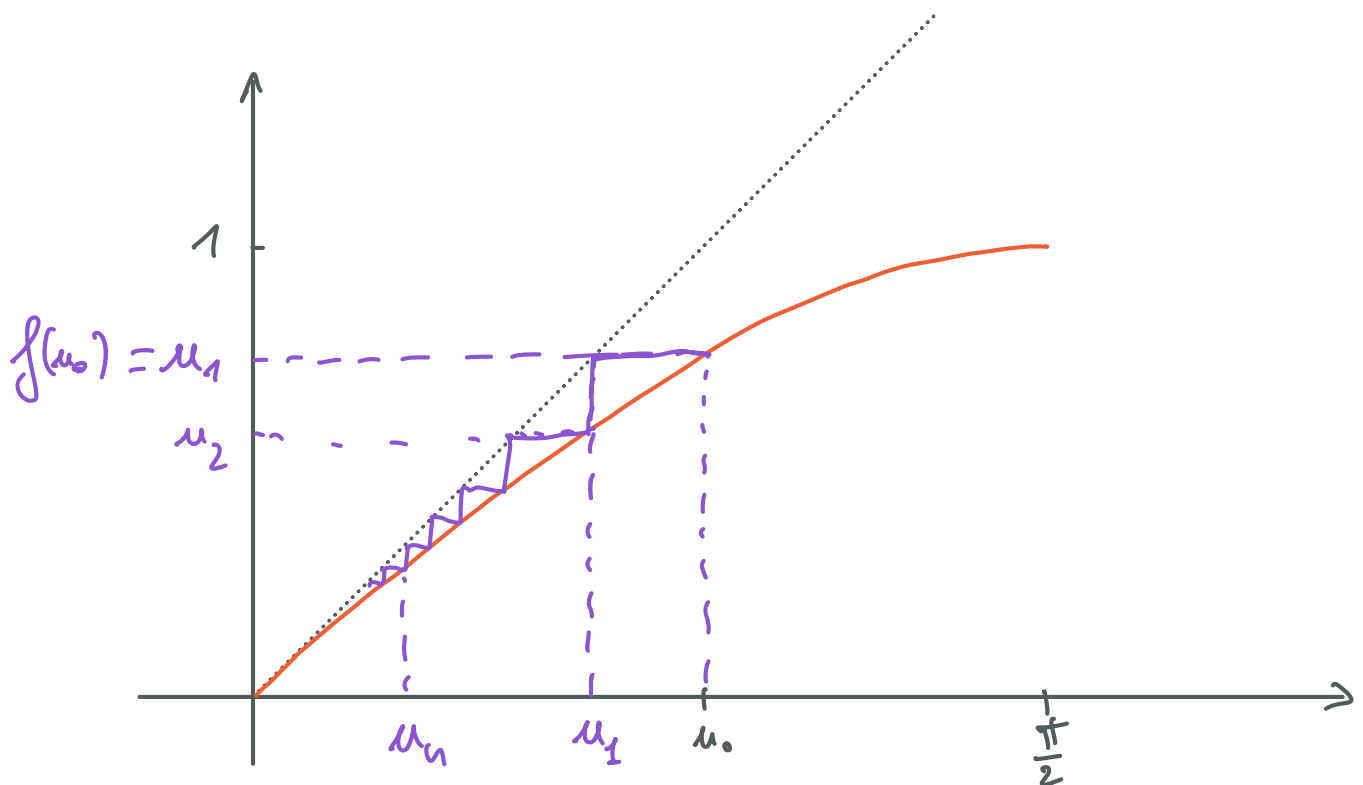
Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer?
19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes?
20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?
21. Qu'est-ce qu'une fonction lipschitzienne? contractante?
22. Si f est contractante et admet un point fixe a , qu'en déduire pour $(u_n)_n$?
23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?

510.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

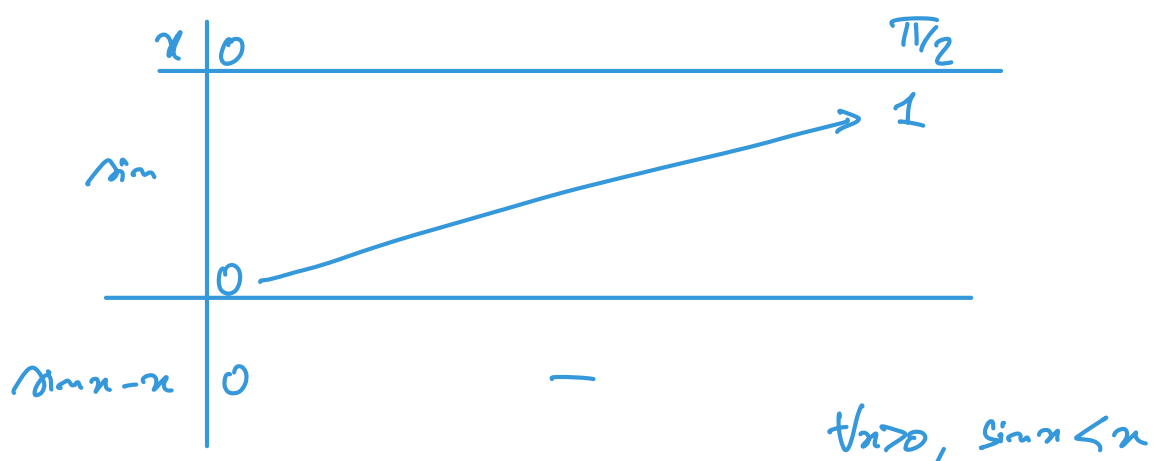


Est-ce que $(u_n)_n$ existe ?

Oui, par récurrence

$\left(\begin{array}{l} u_0 \text{ existe} \\ \text{si } u_n \text{ existe,} \\ \sin(u_n) \text{ existe, } u_{n+1} \text{ existe} \end{array} \right)$

Intervalle stable



$[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $[0, \frac{\pi}{2}]$ stable par sin
donc par réc, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- Monotonie de la suite $(u_n)_n$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \sin x \leq x$$

$$\text{en part par } x = u_n : \quad u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n$$

Remq: pour f croissant, on peut étudier la monotonie par récurrence.

- Convergence de $(u_n)_n$

$(u_n)_n$ est décroissant, minorée par 0

donc $(u_n)_n$ converge. On note l sa limite.

- Valeur de la limite

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

donc à la limite :

"par passage à la limite".
continuité de sin

$$l = \sin(l)$$

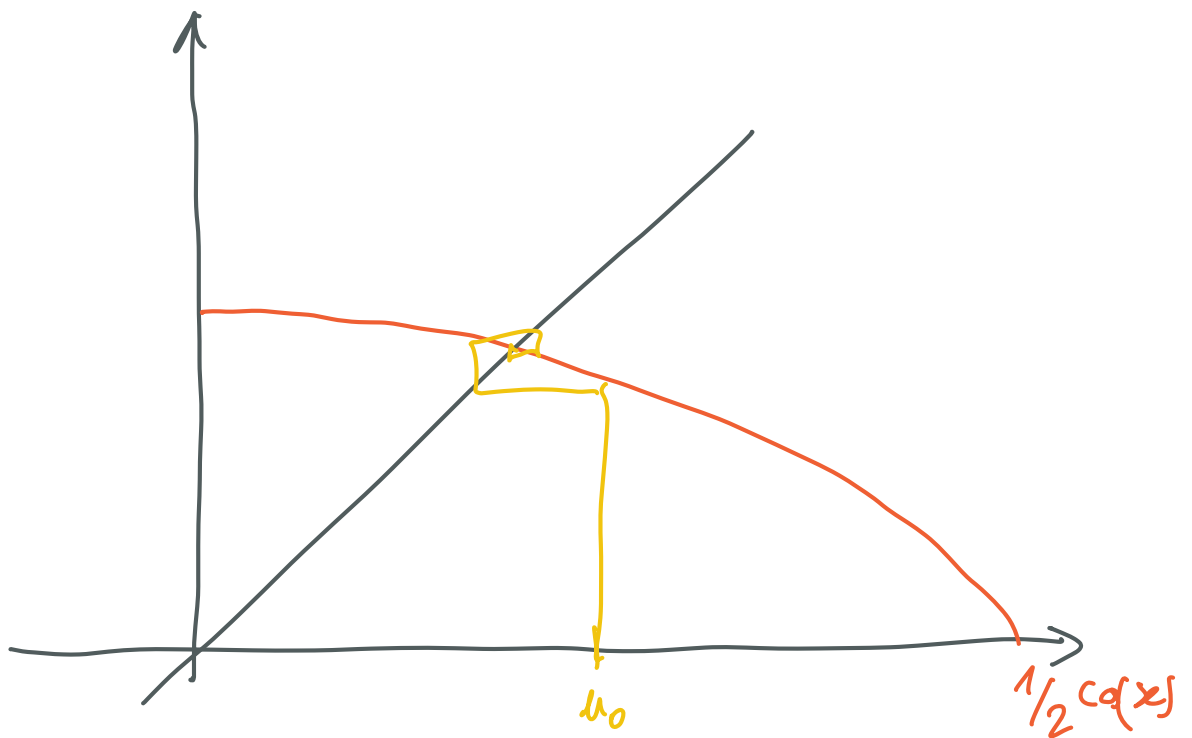
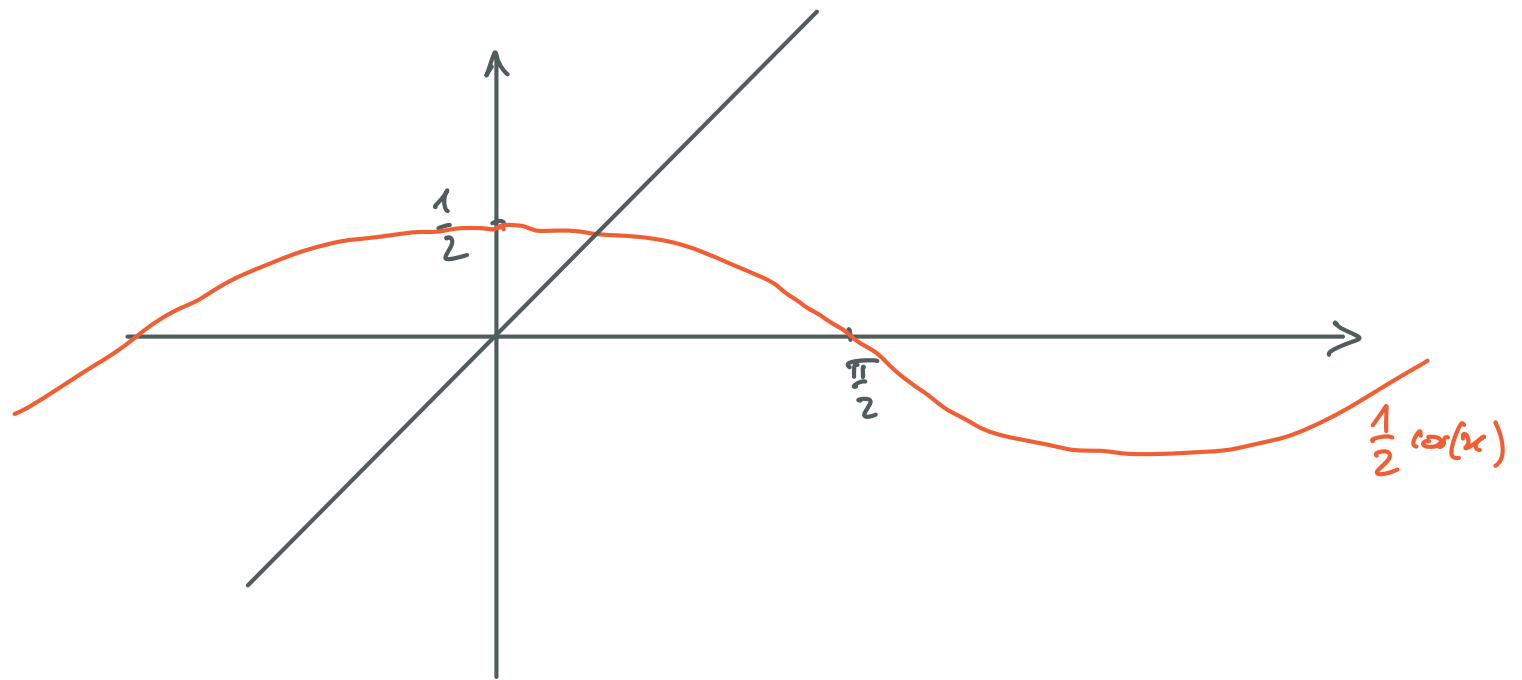
Donc $l = 0$.

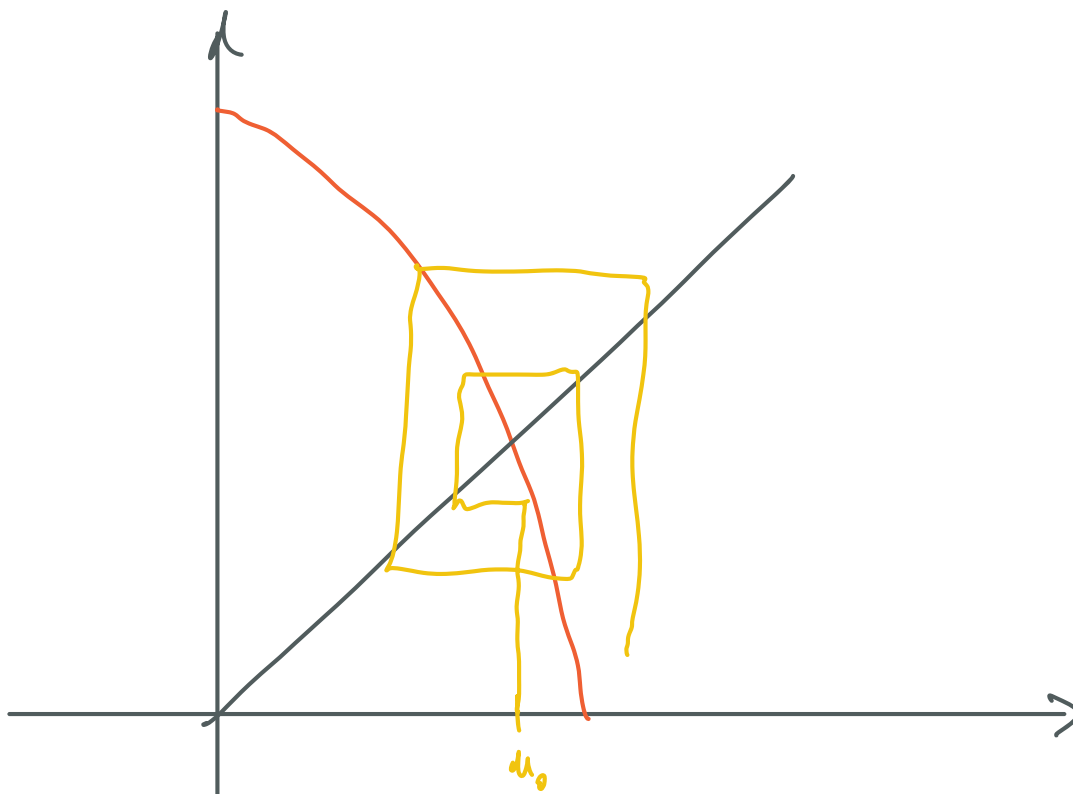
$u_n \rightarrow 0$ vite ou pas vite ?

510.2

Étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$





$$\begin{aligned} &(\mu_{n+1} - l) \\ &|f(\mu_n) - f(l)| \end{aligned}$$

$$(\mu_n - l)$$