

Intégration - focus sur l'intégration des relations de comparaison

1 Intégration des relations de comparaison

1.1 Intégrale généralisée en $+\infty$

1.1.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$$

Preuve:

$$u(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(v(x)) \quad \text{signifie}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad |u(x)| \leq \varepsilon |v(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_x^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$$

$$\leq \int_n^{+\infty} \varepsilon g(t) dt \quad \forall n \geq n_0$$

en appliquant la def

de $f(n) = \int_n^{+\infty} g(t) dt$ avec ε

$\exists n_0$ $\forall t \geq n_0$

$$|f(t)| \leq \varepsilon |g(t)| \\ = \varepsilon g(t)$$

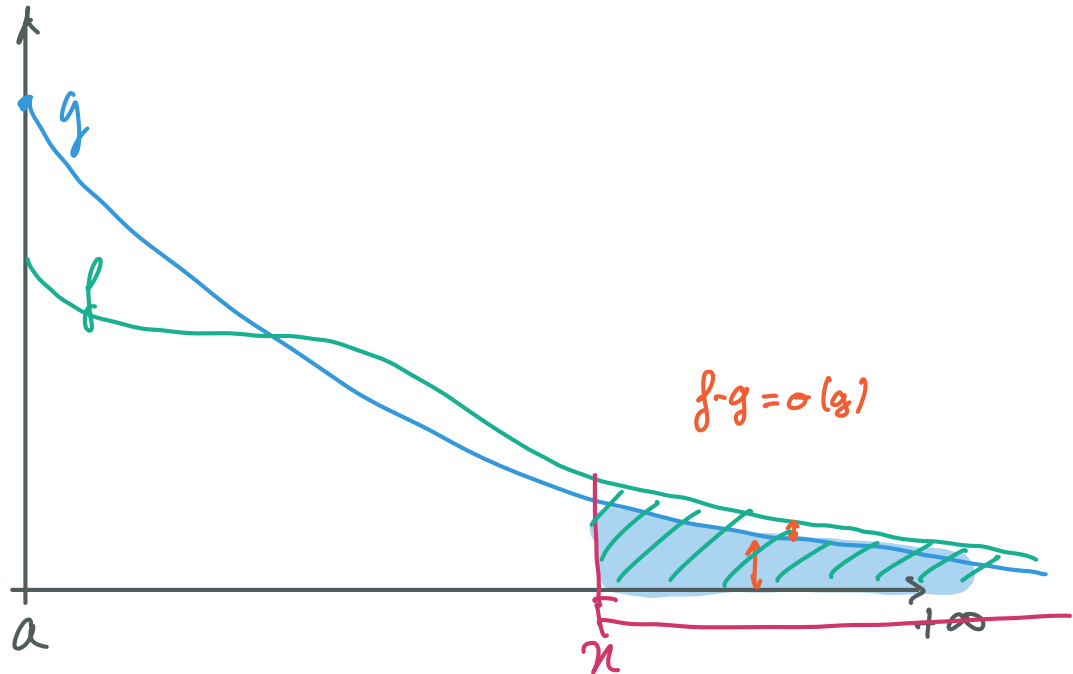
$$= \varepsilon \int_n^{+\infty} g(t) dt.$$

g positive

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.



Preuve:

$$u(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} v(x) \text{ signifie } u(x) - v(x) = o(v(x))_{x \rightarrow +\infty}$$

$$f(x) - g(x) = o(g(x))_{x \rightarrow +\infty}$$

avec g positive, intégrable en $+\infty$

donc par intégration des o :

$$\int_x^{+\infty} (f(t) - g(t)) dt = o \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$$

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt - \int_x^{+\infty} g(t) dt \quad (\text{par ce des 2 int})$$

$$\text{donc } \int_x^{+\infty} f(t) dt \sim \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

651.2

Déterminer un équivalent simple de :

(b) $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

$$t \mapsto \frac{1}{t^3 + 1} \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

$$\text{Au voisin de } +\infty \quad \frac{1}{t^3 + 1} \sim \frac{1}{t^3}$$

$$t \mapsto \frac{1}{t^3} \text{ est positive, intégrable en } +\infty$$

Donc, par intégration des équivalents

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \quad t^{-3} \\ &= \left[-\frac{1}{2} t^{-2} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

1.1.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

$$u(n) = O_{n \rightarrow +\infty}(v(n)) \quad \text{signifie} \quad \left(\frac{u(n)}{v(n)} \text{ bornée au cours de } +\infty \right)$$

$$\exists M \quad \exists x_0 \quad \forall n \geq x_0 \quad |u(n)| \leq M |v(n)|$$

Preuve:

$$\text{Par hyp.} \quad f(n) = O_{n \rightarrow +\infty}(g(n))$$

$$\text{donc } \exists M \quad \exists x_0 \quad \forall n \geq x_0 \quad |f(n)| \leq M g(n) \quad g \geq 0$$

Pour $x \geq x_0$

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M \int_a^x g(t) dt ?$$

$$\leq \int_a^x |f(t)| dt$$

$$= \int_a^{x_0} |f(r)| dr + \int_{x_0}^x |f(r)| dr$$

$$\leq \int_a^{x_0} |f(r)| dr + M \int_{x_0}^x g(r) dr$$

$$= \underbrace{\int_a^{x_0} |f(r)| - Mg(r) dr}_\substack{\text{Constant} \\ C} + M \int_a^x g(r) dr$$

Or g non intégrable et ≥ 0 donc $\int_a^x g(r) dr \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

donc $\exists x_1$ $\forall x \geq x_1$ $\int_a^x g(r) dr \geq C$

$$\leq (1+M) \int_a^x g(r) dr \quad \text{pour } x \geq \max(x_0, x_1)$$

donc $\int_a^x f(r) dr = O\left(\int_a^x g(r) dr\right)$

g positive

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ et g non intégrable en $+\infty$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les intégrales partielles :

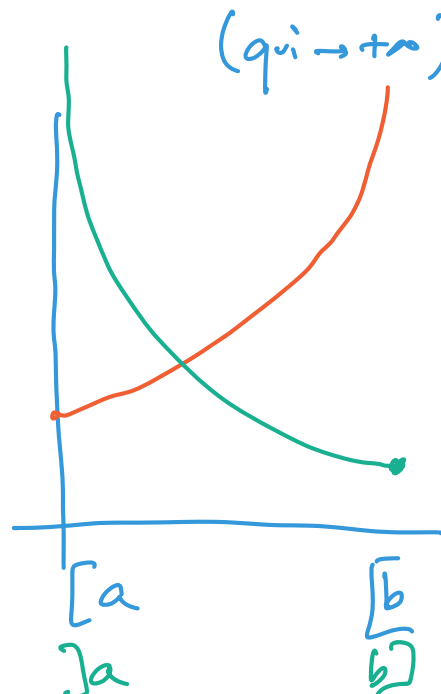
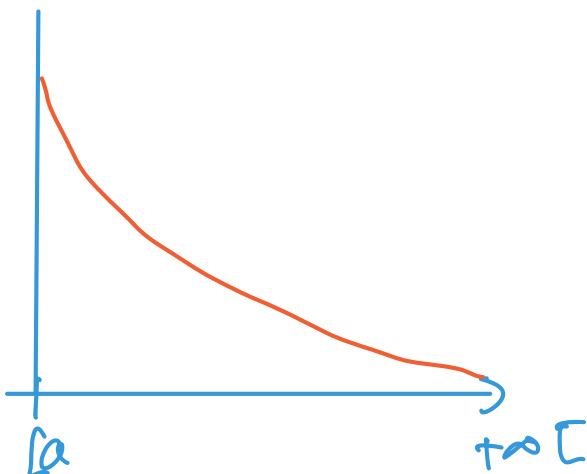
$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x g(t) dt$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

On retient

Si on compare à g intégrable
on compare les restes, (qui $\rightarrow 0$)

Si on compare à g non intégrable
on compare les int partielles
(qui $\rightarrow +\infty$)



1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Le résultat précédent s'adapte pour une intégrale généralisée à gauche en $b \in]-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou généralisée en à droite en $a \in [-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1.2.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \int_x^b g(t) dt$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) \, dt = O_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x g(t) \, dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) \, dt = o_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x g(t) \, dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) \, dt \sim_{x \rightarrow a} \int_a^x g(t) \, dt$$

1.2.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g non intégrable en b , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g non intégrable en b , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

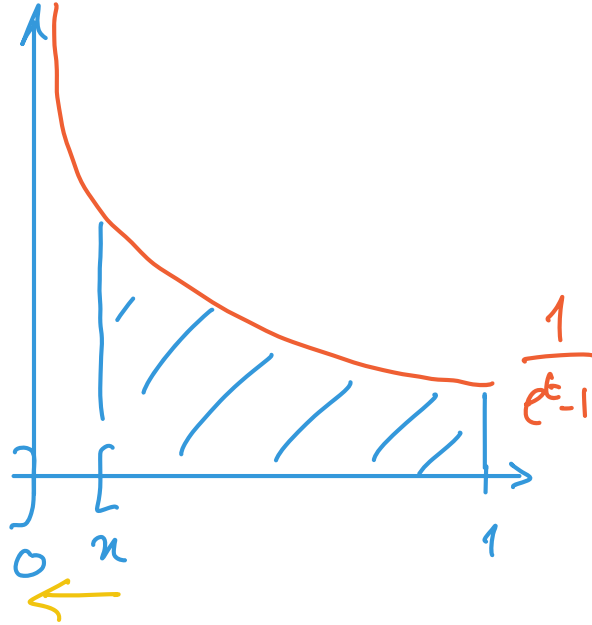
- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ et g non intégrable en b , alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt$$

651.2

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ lorsque $x \rightarrow 0$.



$\int_x^1 \frac{1}{e^t - 1} dt$ est int. partiel de $\int_0^1 \frac{1}{e^t - 1} dt$

• $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ continue (perman.) sur $]0, 1]$

• Au vis. de $t \rightarrow 0$, $\frac{1}{e^t - 1} \sim \frac{1}{t}$

• $t \mapsto \frac{1}{t}$ positive, non intégrable en 0

Donc, par intégration de l'équivalent

$$\int_x^1 \frac{1}{e^t - 1} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g non intégrable en a , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g non intégrable en a , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

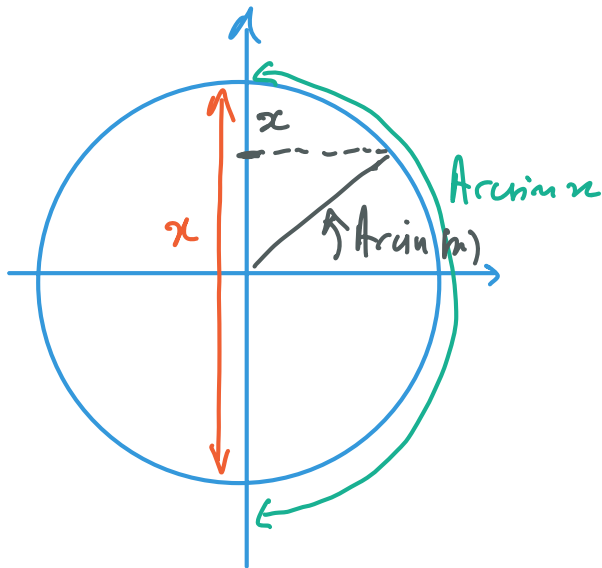
- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et g non intégrable en a , alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow a} \int_x^b g(t) dt$$

651.1

Utiliser l'intégration des relations de comparaison pour déterminer un équivalent, pour $x \rightarrow 1$, de :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$$



$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Asymptote

$$\text{Arcsin } 0 = 0$$

$$\text{Arcsin } 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \dots$$

Arcsin dérivable sur $] -1, 1[$

$$\text{et } \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arcsin}(\varphi(x)) \text{ existe} \Leftrightarrow \varphi(x) \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow 1 - (\varphi(x))^2 \geq 0$$

Peut-on dériver $\text{Arcsin}(\varphi(x))$?

$$f \circ g \quad g' \quad f'(g(x))$$

Pour appliquer le th de dérivée des composées, on

a besoin : φ dérivable sur D

φ à valeurs dans $] -1, 1[$

donc $\text{Arcsin} \circ \varphi$ dérivable sur D et

$$(\text{Arctan} \circ \varphi)'(u) = \varphi'(u) \times \text{Arctan}'(\varphi(u))$$

$$1 - (\varphi(u))^2 > 0$$

en calculant $1 - (\varphi(u))^2$ et on factorise

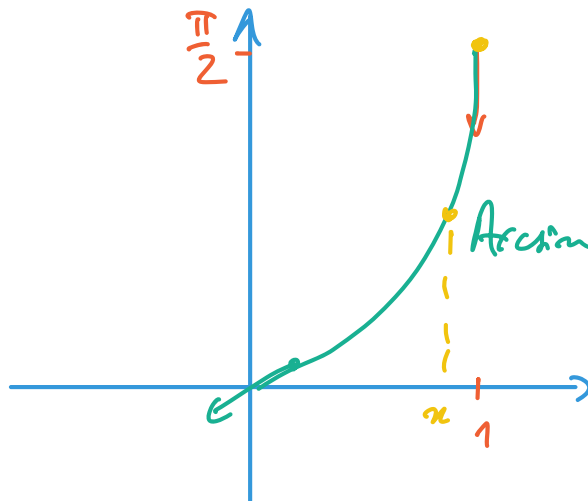
$$\varphi'(u) \times \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi(u)^2}}$$

651.1

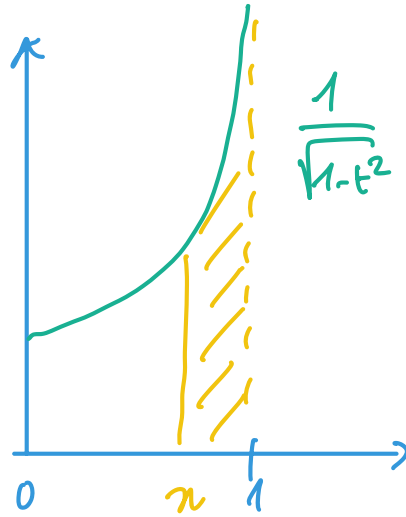
Utiliser l'intégration des relations de comparaison pour déterminer un équivalent, pour $x \nearrow 1$, de :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$$

$$\frac{\pi}{2} = \text{Arctan} 1$$



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} x &= \text{Arctan} 1 - \text{Arctan} x \\ &= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$



C'est le reste de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

An voisinage de $t \rightarrow 1$

$$t = 1 - h \quad \text{où } h \geq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(1-h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2h-h^2}}$$

$$\underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1-t)2}}$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

avec $\frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$ est positive, intégrable en 1 à gauche

car $\frac{1}{\sqrt{2(1-t)^{1/2}}}$ où $\frac{1}{2} < 1$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge

$$\begin{aligned}
 \text{er} \quad \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}} dt \\
 &= \left[-\sqrt{2} \sqrt{1-t} \right]_x^1 \\
 &= \sqrt{2} \sqrt{1-x}
 \end{aligned}$$