

Bourse Sicard

La Commission Permanente du Conseil d'Etablissement, réunie le 28 Novembre 1973, a décidé que les intérêts annuels provenant du legs SICARD seraient utilisés sous forme de bourses attribuées à des élèves **méritants** du Lycée La Martinière pour les aider à réaliser, durant les vacances d'été :

- soit un voyage d'études (à prendre au sens large : culture, sport, recherche) en France ou à l'étranger.
- soit toute autre initiative créatrice.

Il est toutefois précisé que les projets présentés devront comporter **une dimension éducative, solidaire ou humanitaire, ou contribuer à une action d'aide, de partage ou d'intérêt collectif.**

Les projets ayant pour objectif principal des vacances personnelles ou un séjour touristique ne pourront pas être retenus.

Il est entendu que les élèves peuvent faire soit acte de candidature individuelle, soit s'associer au sein d'une même classe ou de classes différentes pour présenter un projet commun (jusqu'à cinq maximum).

Pour faire acte de candidature les conditions sont les suivantes :

- **être élève du lycée la Martinière Monplaisir depuis au moins deux ans** et être dans une classe terminale (Terminale de Lycée, 2ème année de CPGE ou de BTS)
- **ne pas avoir bénéficié d'une bourse SICARD les années passées.**

Les élèves répondant aux conditions exigées et désirant faire acte de candidature pour l'obtention **d'une bourse SICARD 2026** sont invités à se faire connaître au professeur principal de la classe sur une liste établie par le Secrétariat-Elèves. Cette liste sera à remettre au Secrétariat avant **le 4 Avril 2026.**

Chaque intéressé recevra **une fiche de candidature** à remplir. Cette fiche, accompagnée du projet complet et précis envisagé et du **budget prévisionnel** sera remise au Secrétariat **au plus tard le 9 mai 2026.**

Séries numériques, focus sur la sommation des relations de comparaison

$$\sum u_n$$

$$u_n \in \mathbb{K}$$

$$\sum_{n=0}^N u_n$$

si convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$, \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

On suppose $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ sous certaines hypothèses

alors $u_0 + u_1 + \dots + u_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} v_0 + v_1 + \dots + v_N$

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

Preuve cas du o . On fait la preuve en revenant à la déf.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\text{On cherche } n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right|$$

Par déf de $u_n = o(v_n)$ avec ε

$$\text{donc } \exists n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Pour $n \geq n_0$, $p > n$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p \varepsilon v_k \quad (v_k \geq 0) \\ &= \varepsilon \sum_{k=n+1}^p v_k \end{aligned}$$

À la limite pour $p \rightarrow +\infty$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

valable pour tout $n \geq n_0$.

$$\text{On a montré } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

Preuve: on suppose $u_n \sim v_n$ i.e. $u_n - v_n = o(v_n)$

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

Avec $(v_n)_n$ nulle positive et $\sum v_n$ converge donc

par le point précédent

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

||

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \quad \text{car } \sum u_k, \sum v_k \text{ convergent.}$$

$$\begin{aligned} \text{On a montré} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \\ &\sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \end{aligned}$$

S21.4 (a) Notons $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$

- Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$

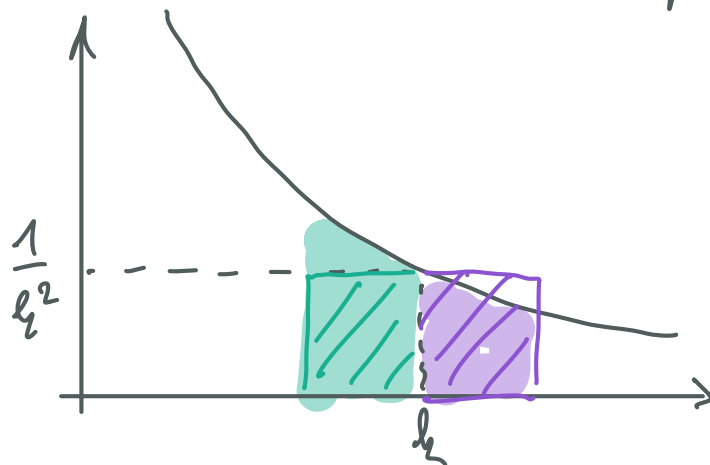
$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

avec $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge
 (la suite des restes tend vers 0, résulte
 de la suite des restes)

$$\text{Donc } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

- Recherche d'un équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
 par comparaison série intégrale.

$k \mapsto \frac{1}{k^2}$ est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$
 et positive



$$\forall p > n \quad \sum_{k=n+1}^p \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^p \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \int_n^p \frac{1}{t^2} dt$$

À la limite pour $p \rightarrow +\infty$, par cv de $\int \frac{1}{t^2} dt$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{ii} \quad \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

$\int_{+\infty}^{+\infty}$

$\frac{1}{n}$

par encadrement: $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

• CQ:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ **div**erge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

Preuve: cas du O , en revenant à la définition

$$\forall n \exists M, \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M \sum_{k=0}^n v_k$$

Par hypothèse, $\exists M, \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq M v_n$

Pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| + M \sum_{k=n_0}^n v_k \end{aligned}$$

$$= M \sum_{k=0}^n v_k + \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right| - M \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k}_{\text{Constante (indép de } n \text{) notée } C}$$

Or $\sum v_n$ est une série divergente à termes ≥ 0

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{donc } \exists n_1 \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad \sum_{k=0}^n v_k \geq \frac{C}{M}$$

Bref:

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1)$$

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2M \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\text{et donc } \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\sum u_n$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\sum u_n$ converge.

Remarque. Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.

Preuve: on applique le point précédent

$$\text{avec } u_k - v_k = o(v_k)$$

où $\sum v_n$ diverge

521.4 (b) On note $u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

• Asymptotique de $n \rightarrow +\infty$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

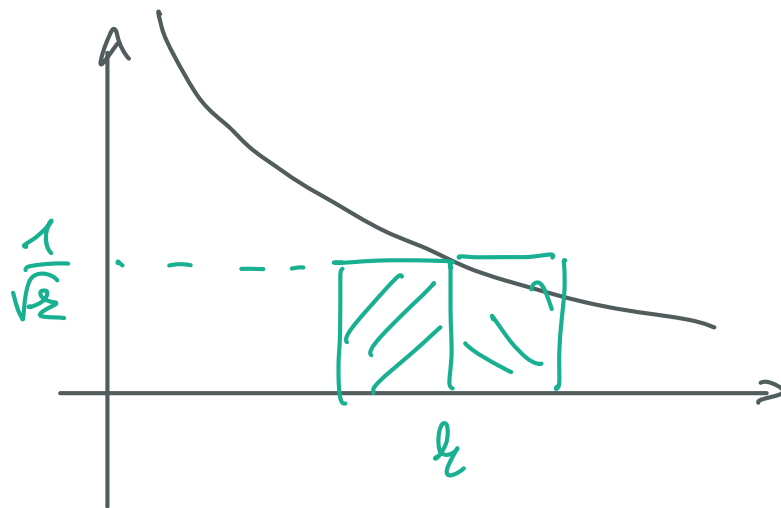
avec $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Donc (ici les sommes partielles $\rightarrow +\infty$)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

• On effectue une comparaison série/intégrale

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante



Pour tout n

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$1 + [2\sqrt{t}]_1^n$$

$$\text{donc } \underbrace{2\sqrt{n+1} - 1}_{\int_{2\sqrt{n}}^{2\sqrt{n+1}}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \underbrace{2\sqrt{n} - 1}_{\int_{2\sqrt{n}}^{2\sqrt{n+1}}}$$

$$\text{donc par encadrement, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

CCP: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

Autre méthode:

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \geq 2 \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\text{avec } w_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \geq 0$$

et $\sum w_n$ télescopique divergente.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n w_k \\ &\underset{||}{=} \\ &\underset{||}{=} 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ &\underset{||}{=} 2\sqrt{n} \\ &\text{par télescopage.} \end{aligned}$$

S10.3 (b)

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ie $u_n = o(1)$

avec $1 \geq 0$ et $\sum 1$ diverge

donc, par sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$$

$$\text{ie } \sum_{k=0}^n u_k = o(n+1)$$

$$\text{ie } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l > 0$ alors $u_n \sim_l$

avec $l > 0$ et $\sum l$ diverge

donc

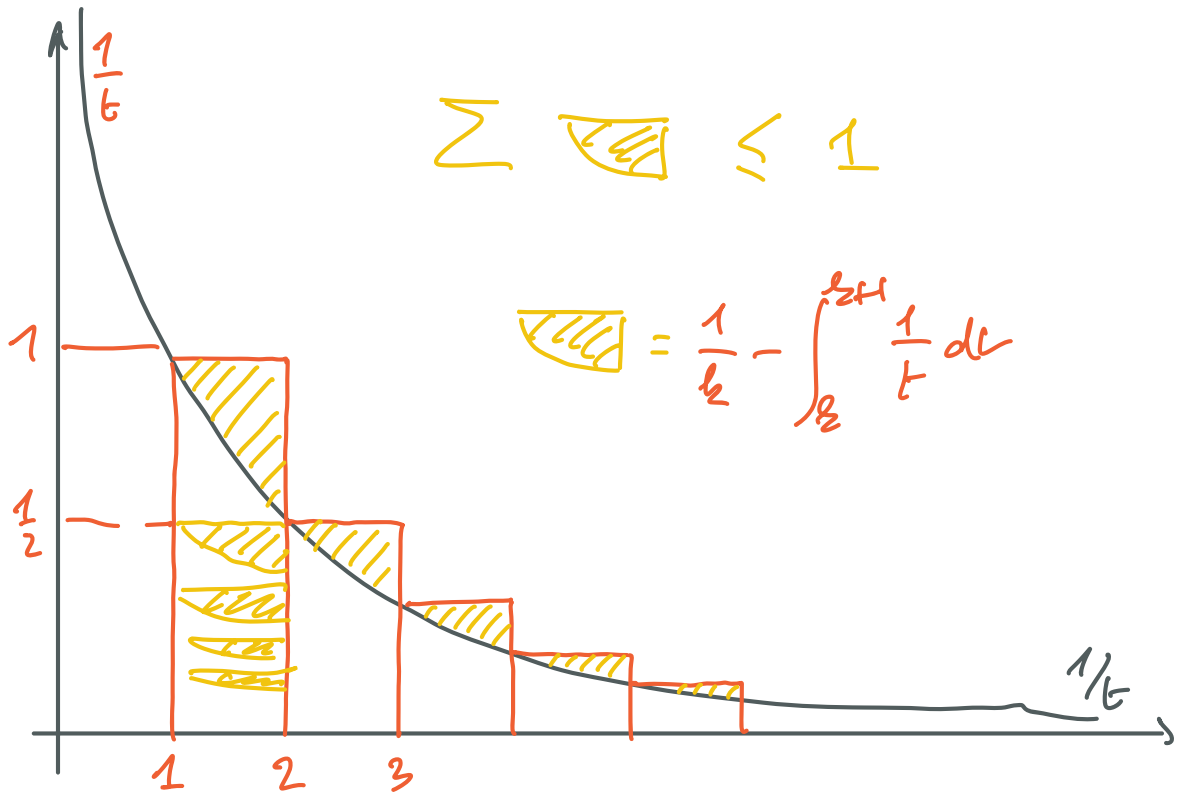
$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^n l$$

||
(n+1)l

$$\text{ie } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l.$$

- Si $l < 0$, $-u_n$

521.1



$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

Bew: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt + O(1)$

$$= \ln(n+1) + O(1)$$

$$= \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O(a)$$

$$= \ln(n) + O(1)$$

$\sim \ln(n)$

$$(b) \quad S_n - \ln(n) \quad \text{ou} \quad S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-\sqrt{k}}{k(k+\sqrt{k})} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2} + k} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{1}{k^{3/2} + k} \sim \frac{1}{k^{3/2}} \text{ qd s'agit d'une s\u00e9rie convergente}$$

donc $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2} + k} \right)_n$ est une suite convergente.
on note l sa limite

Ans:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = l + o(1)$$

$$\text{ou } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

$$\text{car } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \ln(n)$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right)$$

$$\text{avec } \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+0}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$$

donc $\sum \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ série abs. convergente

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{matrix} \text{limite finie} \\ \text{notée } \gamma \end{matrix}$$

CQ: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2}} = \ln(n) + \underbrace{\gamma - \frac{1}{2}}_C + o(1)$