

Sur les 7<sup>h</sup>, à rédiger au choix

111.13

140.11

480.8

140.21 [\*]

## Connexité par arc

### 1 Parties connexes par arcs

#### 1.1 Chemin continu

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . Pour  $a, b \in A$ , on appelle **chemin continu** (ou : arc) joignant  $a$  à  $b$  dans  $A$  toute application :

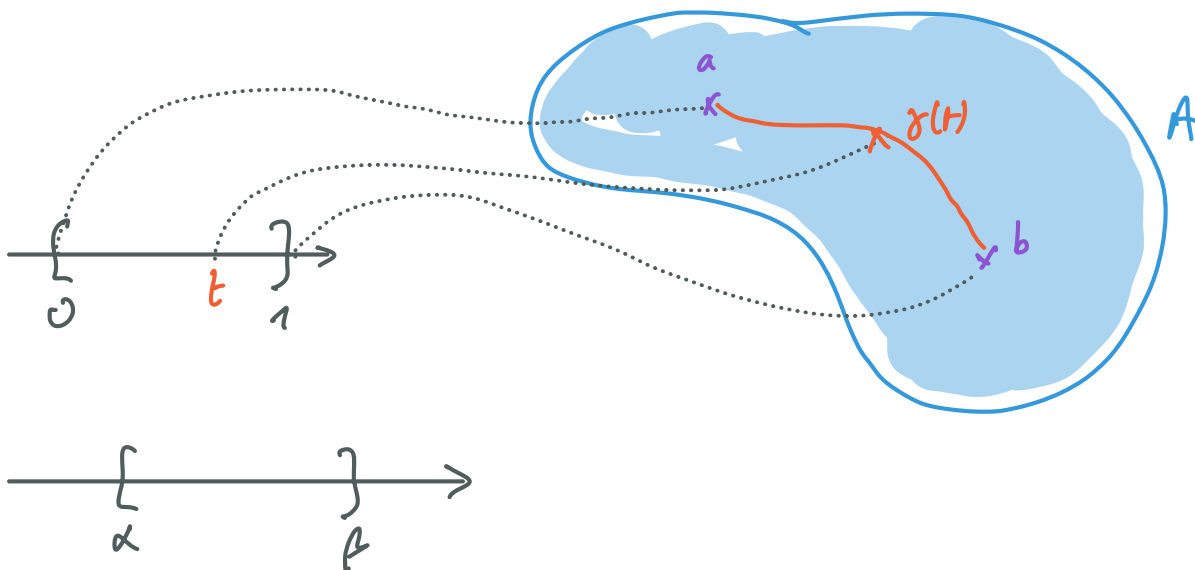
$$\varphi : [0, 1] \rightarrow E$$

telle que :

- $\varphi$  est continue
- $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in A$
- $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(1) = b$

**Remarque.**

- L'image (directe)  $\varphi([0, 1])$  s'appelle parfois le **support** du chemin.
- Par abus,  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$  continue, à valeurs dans  $A$  et telle que  $\gamma(\alpha) = a$  et  $\gamma(\beta) = b$  s'appelle aussi **chemin** : on se ramène à la définition en composant  $\varphi$  par  $t \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$  ou  $\gamma$  par  $t \mapsto \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$ .



**Définition.** On définit une relation binaire sur  $A$  en disant que  $a \mathcal{R} b$  lorsqu'il existe un chemin continu joignant  $a$  à  $b$  dans  $A$ .

**Proposition.**  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $A$ .

Preuve:

• Réflexive Soit  $a \in A$

On pose  $\gamma: [0,1] \rightarrow E$   
 $t \mapsto a$



$\gamma$  est continue (constant), à valeurs dans  $A$

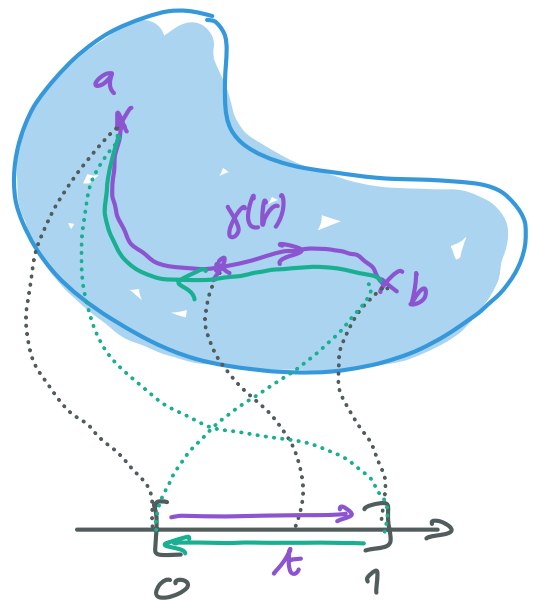
$\gamma(0) = \gamma(1) = a$  donc  $a \mathcal{R} a$

• Symétrique Soit  $a, b \in A$

On suppose  $a \mathcal{R} b$

i.e.  $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow E$  continu

$\forall t \gamma(t) \in A, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$



On définit

$\varphi: [0,1] \rightarrow E$   
 $t \mapsto \gamma(1-t)$

$\varphi$  continue, à valeurs dans  $A$ ,  $\varphi(0) = \gamma(1) = b$   
 $\varphi(1) = \gamma(0) = a$

donc  $b \mathcal{R} a$

Théorème: Soit  $a, b, c \in A$

$$\text{tg } aRb, bRc$$

$$\exists \varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow E \text{ continus}$$

$$\text{tg } \forall t \varphi_1(t) \in A \quad \varphi_2(t) \in A$$

$$\varphi_1(0) = a, \quad \varphi_1(1) = b$$

$$\varphi_2(0) = b, \quad \varphi_2(1) = c$$

On définit

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

•  $\gamma$  est à valeurs dans  $A$  car  $\varphi_1, \varphi_2$  le sont

$$\bullet \gamma(0) = \varphi_1(0) = a ; \quad \gamma(1) = \varphi_2(1) = c$$

•  $\gamma$  est continue sur  $[0, \frac{1}{2}[$  et  $] \frac{1}{2}, 1]$

car  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont continus sur  $[0, 1]$

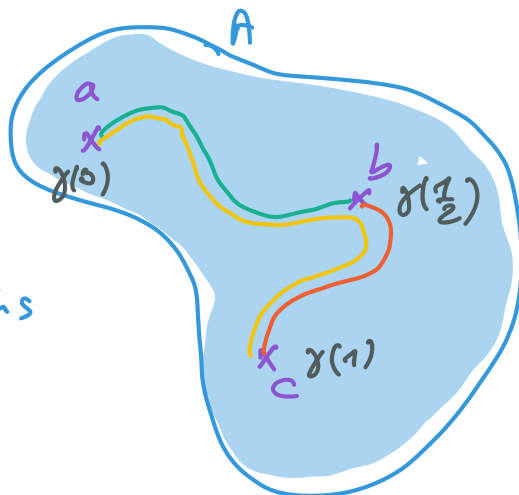
• Continuité en  $\frac{1}{2}$

$$\text{pour } t \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma(t) = \varphi_1(2t) \rightarrow \varphi_1(1) = b$$

$$\text{pour } t \geq \frac{1}{2}, \quad \gamma(t) = \varphi_2(2t-1) \rightarrow \varphi_2(0) = b$$

donc  $\gamma$  est continue en  $\frac{1}{2}$

CCl.  $aRc$



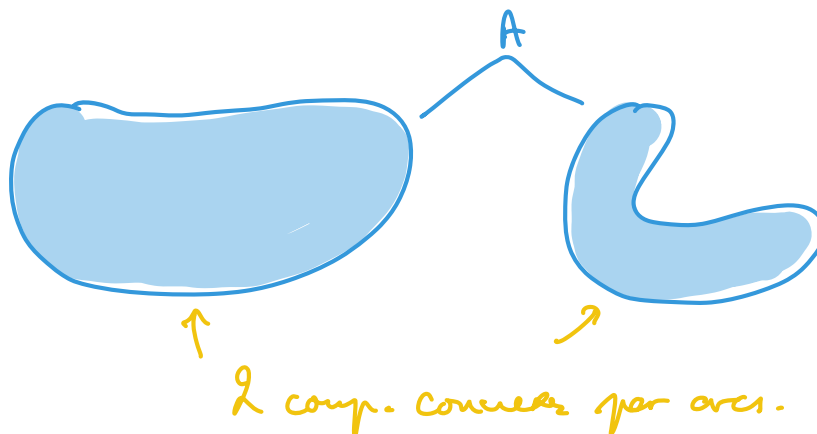
## 1.2 Composantes connexes par arcs, connexité par arcs

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $E$ .

- On appelle **composantes connexes par arcs de  $A$**  les classes d'équivalences de la relation  $\mathcal{R}$ .
- On dit que  $A$  est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs, qui est  $A$ .

↑  
i.e.  $\forall a, b \in A$ , on a  $a \mathcal{R} b$   
i.e.  $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow E$  tq  
 $\gamma$  continu, à valeurs dans  $A$   
 $\gamma(0)=a, \gamma(1)=b$ .

**Proposition.** Les composantes connexes par arcs de  $A$  forment une partition de  $A$ .



Remarque:

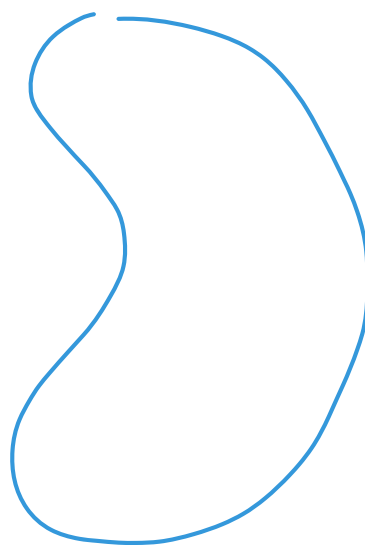
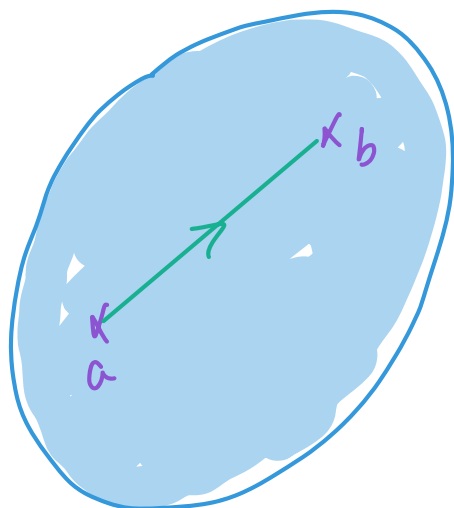
$GL_n(\mathbb{R})$  connexe par arcs ?

$GL_n(\mathbb{C})$  " " ?

$$A = \{0\} \times [-1,1] \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right), x > 0 \right\}$$

connexe par arcs ?

**Exemple.** Une partie convexe de  $E$  est connexe par arcs.



Soit  $a, b \in A$  convexe.

On pose  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow E$

$$t \longmapsto (1-t)a + tb$$

$\gamma$  est continu

$\gamma$  est à valeurs dans  $A$  car  $A$  convexe

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b.$$

Donc  $A$  est convexe par arcs.

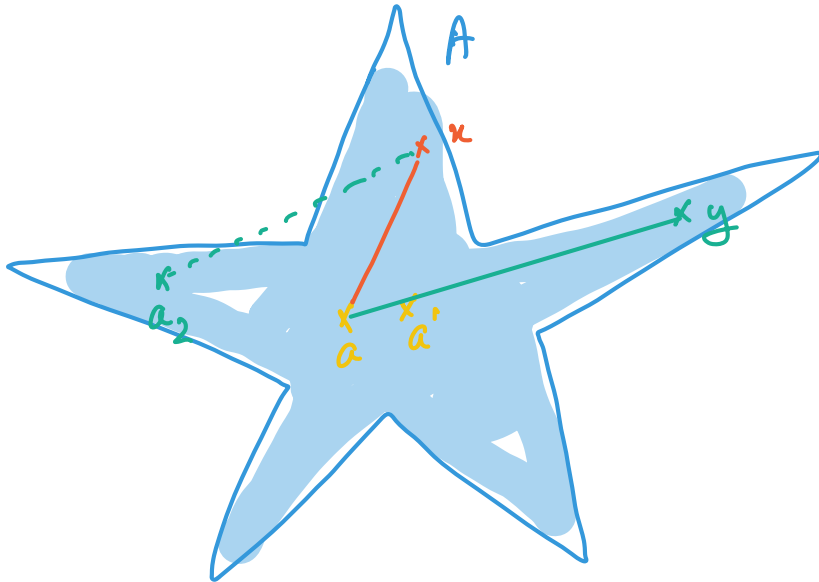
**Définition.** Une partie  $A$  de  $E$  est **étoilée** s'il existe  $a \in A$  tel que :

$$\forall x \in A, [a, x] \subset A$$

où  $[a, x]$  désigne le segment d'extrémités  $a$  et  $x$  :

$$[a, x] = \{(1-t)a + tx, t \in [0, 1]\}$$

**Proposition.** Une partie étoilée de  $E$  est connexe par arcs.



Preuve: Soit  $x, y \in A$

$A$  étoilée, donc  $\exists a \in A$  tq  $[a, x] \subset A$

$[a, y] \subset A$

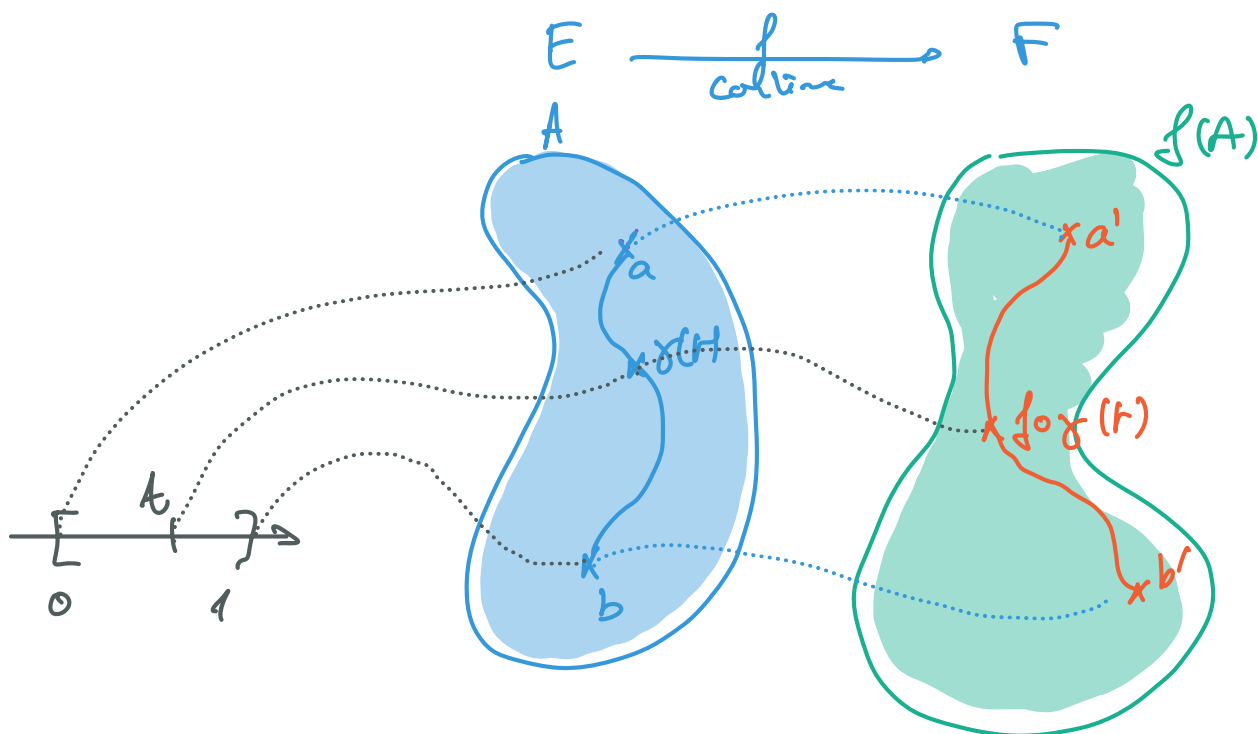
donc  $a R y$  et  $a R x$

donc, par symétrie et transitivité,  $x R y$

### 1.3 Image d'un connexe par arcs par une application continue

#### Théorème.

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $f : E \rightarrow F$  et  $A$  une partie de  $E$ .  
Si  $A$  est connexe par arcs et  $f$  continue, alors  $f(A)$  est connexe par arcs.



Soit  $a', b' \in f(A)$

donc  $\exists a, b \in A$  tq  $a' = f(a)$  et  $b' = f(b)$

$A$  connexe par arcs et  $a, b \in A$

donc  $\exists \gamma : [0, 1] \longrightarrow E$  continue tq

$\forall t, \gamma(t) \in A, \quad \gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b$

On pose alors

$\varphi = f \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow F$

- $\varphi$  continue comme composée d'applications continues

- $\forall t, \varphi(t) = f[\gamma(t)]$   
 $\in f(A)$  car  $\gamma(t) \in A$

- $\varphi(0) = f(\gamma(0)) = f(a) = a'$   
 $\varphi(1) = f(\gamma(1)) = f(b) = b'$

Bruf:  $f(A)$  est convexe par arcs.

Remarque: Si  $f: E \rightarrow F$  continue "poussé en avant".

- image directe d'un convexe par arcs est convexe par arcs "trien arrière"
- image directe d'un compact est compact
- image réciproque d'un fermé est fermé
- image réciproque d'un ouvert est ouvert

Exemple. Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs.

Par l'absurde

Si  $GL_n(\mathbb{R})$  connexe par arcs.

Alors  $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$

En effet :

•  $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M \in \mathbb{R}^*$

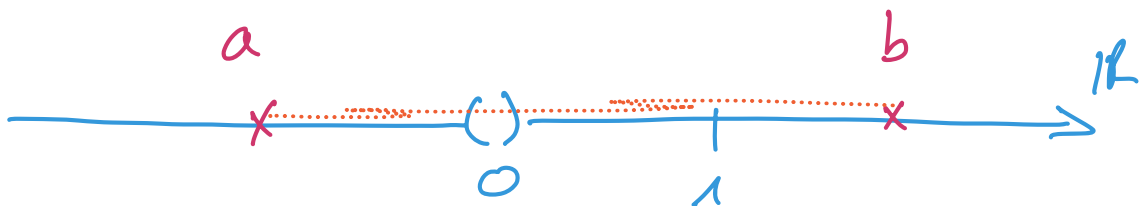
• Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $M = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

$\det M = \lambda \quad M \in GL_n(\mathbb{R})$

Or  $\mathbb{R}^*$  n'est pas connexe par arcs

$\det$  continue

Donc  $GL_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs.



## 2 Le cas de $\mathbb{R}$

**Proposition.** Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

**Remarque.** Ainsi, dans  $\mathbb{R}$ , les trois expressions « connexe par arcs », « convexe » et « intervalle » désignent la même notion. C'est spécifique à  $\mathbb{R}$ .

Preuve:

$\Rightarrow$  Soit  $I$  un intervalle.

Soit  $a, b \in I$  (par ex  $a \leq b$  quitte à les échanger)

Par def de intervalle  $[a, b] \subset I$

Donc  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (1-t)a + tb$$

est continue, à val. dans  $I$ ,  $\gamma(0)=a$ ,  $\gamma(1)=b$

$\Rightarrow$  Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  convexe par arcs.

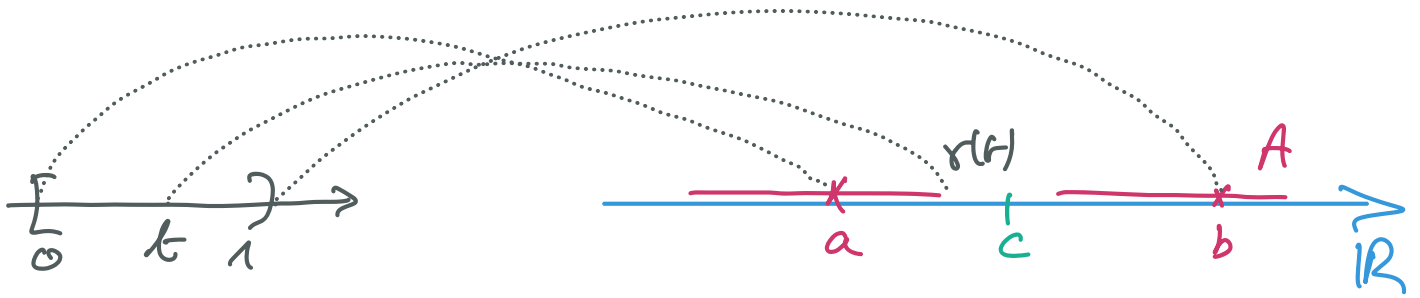
Alors  $A$  est un intervalle.

Soit  $a, b \in A$  (avec  $a \leq b$ , quitte à échanger  $a, b$ )

Soit  $c \in [a, b]$  Alors  $c \in A$

$A$  convexe par arcs, donc  $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma$  continue,  $\forall t \gamma(t) \in A$ ,  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$



$\gamma$  continue,  $\gamma(0) = a$

$\gamma(1) = b$

Donc par th de val. intermédiaires,

$\gamma$  prend toute valeur intermédiaire entre  $a$  et  $b$

en particulier:  $\exists t \in [0, 1] \text{ s.t. } \gamma(t) = c$

or  $\gamma(t) \in A$  donc  $c \in A$ .

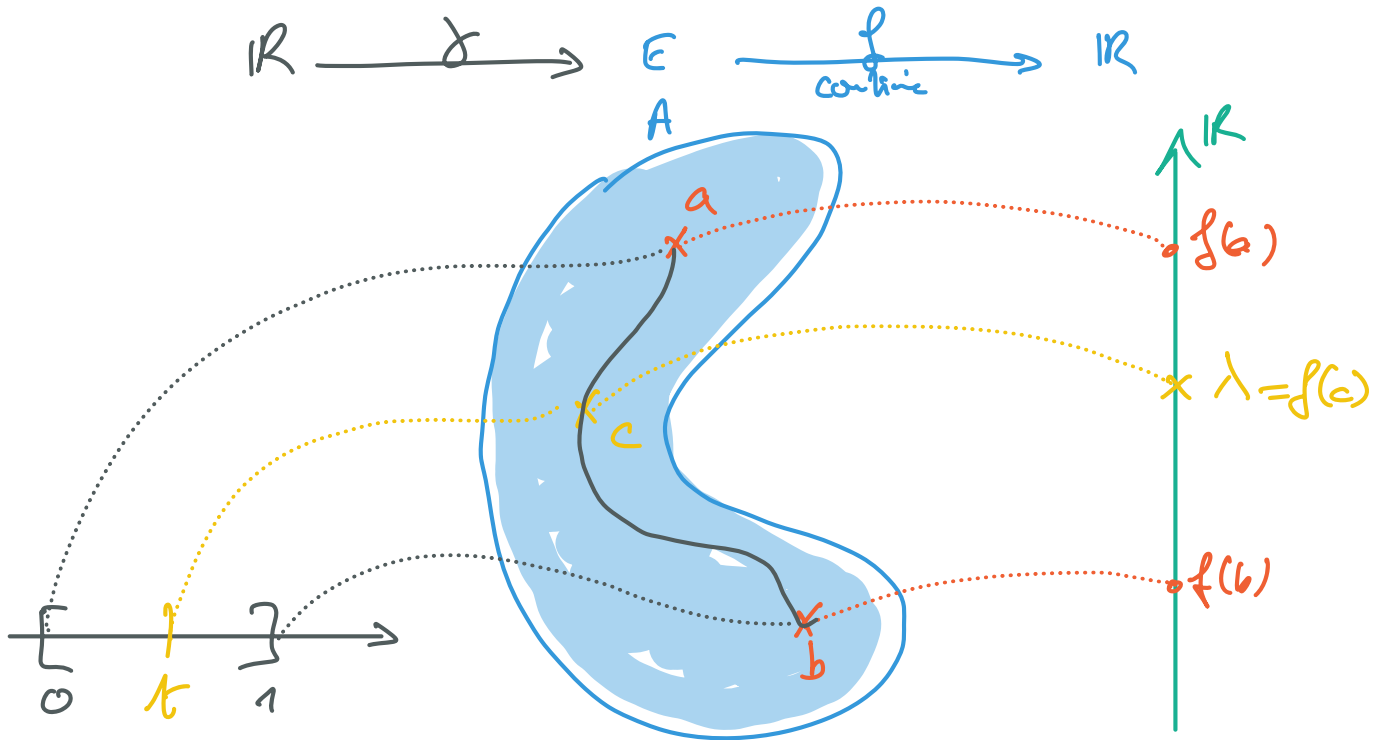
### Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit  $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue, et que  $A$  est connexe par arcs, alors  $f$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout  $a, b \in A$ ,  $f$  prend toute valeur intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

#### Remarque.

- La conclusion peut aussi s'écrire :  $f(A)$  est un intervalle.
- Dans le cas où  $f(a) \leq f(b)$ , pour tout  $\gamma$  tel que  $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ , il existe  $c \in A$  tel que :

$$\gamma = f(c)$$



Preuve: Soit  $a, b \in A$ ,  $\lambda$  intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .  
 $A$  connexe par arcs, donc

$$\exists \gamma : [0, 1] \longrightarrow E \quad \gamma$$

$\gamma$  continue,  $\forall t \gamma(t) \in A$ ,  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ .

Alors  $f \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  continue et  
 $\lambda$  est intermédiaire entre  $f \circ \gamma(0)$  et  $f \circ \gamma(1)$

par le th. des val. intermédiaires :

$$\exists t \in [0, 1] \quad \gamma \quad f \circ \gamma(t) = \lambda$$

On pose  $c = \gamma(f)$

$\in A$  car  $\gamma$  a valeurs dans  $A$ .

On a donc  $c \in A$  et  $\lambda = \int(c)$

### 3 Caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

#### Théorème.

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  ouvert, avec  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose  $U$  connexe par arcs. Alors :

$$f \text{ est constante sur } U \iff df \text{ est nulle sur } U$$

On a démontré ce résultat pour  $U$  convexe.







