

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

4 Matrices orthogonales

4.1 Définition

mat de changement de bases orthonormées

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si et seulement si :

$$AA^T = I_n$$

On note $O_n(\mathbb{R})$ (ou parfois $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2 Caractérisations

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

- (i) A est une matrice orthogonale ;
- (ii) $A^T A = I_n$, i.e. les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$;
- (iii) A est inversible et $A^{-1} = A^T$;
- (iv) $AA^T = I_n$, i.e. les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$;

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Alors :

$$u \in O(E) \iff \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \in O_n(\mathbb{R})$$

Remarque. L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E . Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$$

et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4.3 Propriétés

Proposition. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A est inversible, et $A^{-1} = A^T$
- $\det A = \pm 1$

4.4 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. On appelle $O_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal d'ordre n** .

Définition. On note $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$ (parfois aussi noté $O_n^+(\mathbb{R})$). C'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé le **groupe spécial orthogonal d'ordre n** .

Ses éléments sont les matrices orthogonales **directes** (ou **positives**).

Les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales **indirectes** (ou **négatives**).

5 Orientation

5.1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Fixons E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Remarque. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , on sait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est un réel non nul.

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ désigne le déterminant de la famille des vecteurs de $\mathcal{B}'$, exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

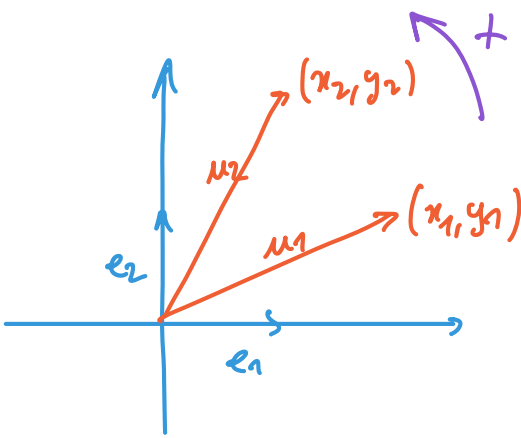
Définition. On dit que $\mathcal{B}$ a la même orientation que $\mathcal{B}'$ lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Proposition. « a la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E . Il y a exactement deux classes d'équivalences.

Définition. **Orienter** E , c'est faire le choix de l'une des deux classes d'équivalence pour la relation « a la même orientation ». On fait en général ce choix à travers le choix d'une base particulière, un représentant de la classe choisie. Les bases de cette classe sont dites **directes**, les autres **indirectes**.

Exemple. En général, on oriente $\mathbb{R}^n$ en choisissant la base canonique directe.

$\mathbb{R}^2$



$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ directe

$\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1)$ indirecte

$\text{Pass}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$

$\det_{\mathcal{B}_1}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$ par exemple

$\det_{\mathcal{B}_2}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} e_2 \\ e_1 \end{matrix} = x_2 y_1 - x_1 y_2 < 0$

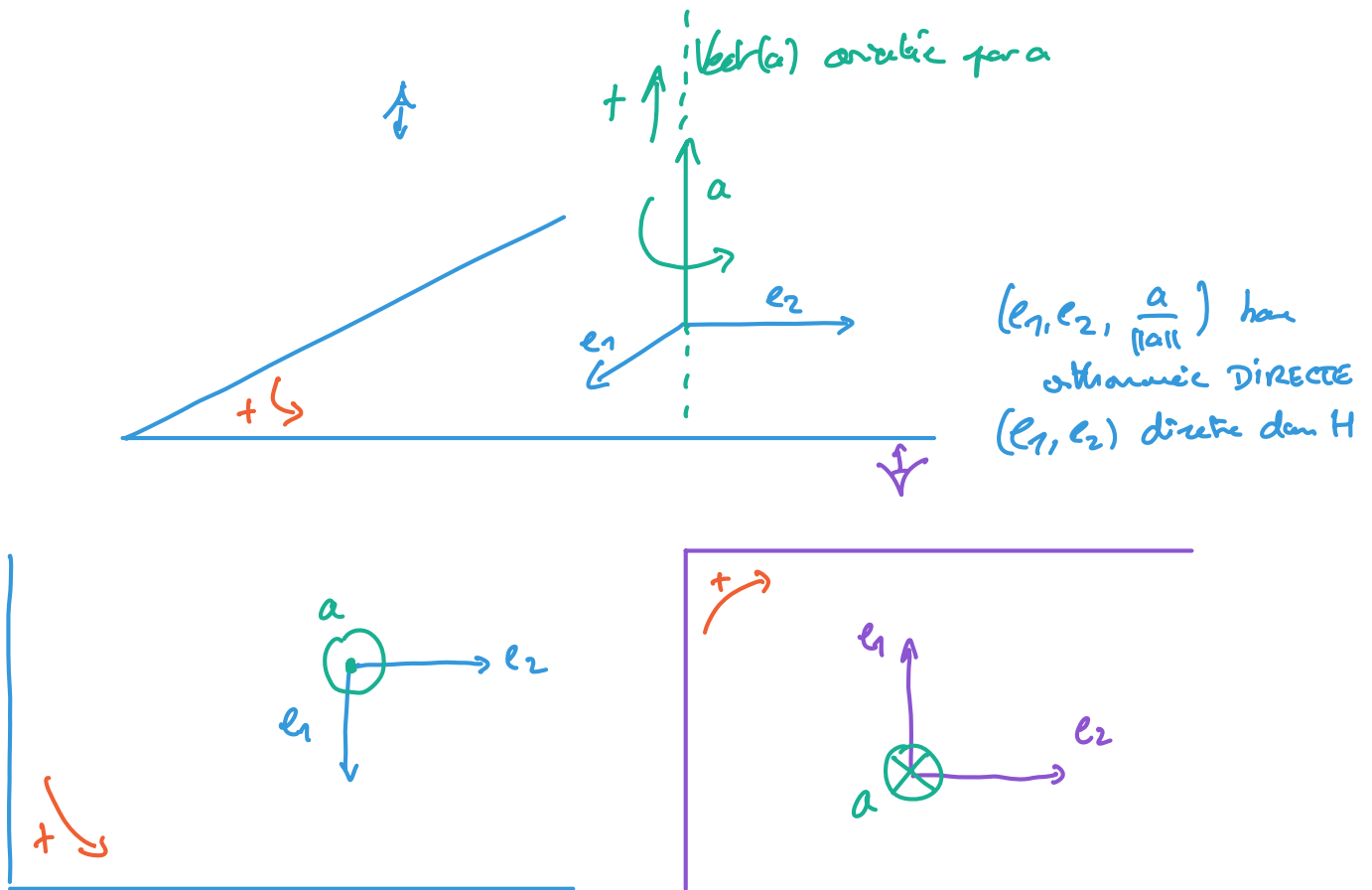
$\det_{\mathcal{B}_1}(u_1, u_2) = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \times \det_{\mathcal{B}_2}(u_1, u_2)$

$= \det \text{Pass}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) \times \det_{\mathcal{B}_2}(u_1, u_2)$

$\det_{\mathcal{B}_1} \text{ et } \det_{\mathcal{B}_2} \text{ sont de m\^eme signe} \Leftrightarrow \det \text{Pass}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) > 0$

5.2 Orientation d'un hyperplan

Définition. Soit E un espace euclidien orienté, et H un hyperplan de E . On oriente H par le choix d'un vecteur normal a : une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H est **directe** lorsque $(e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{a}{\|a\|})$ est une base directe de E .



5.3 Espace euclidien orienté, produit mixte

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Le déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans toutes les bases orthonormales directes de E .
On peut donc noter :

$$\det(x_1, \dots, x_n)$$

pour désigner $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée quelconque de E .

Remarque. On trouve aussi la notation $[x_1, \dots, x_n]$, et l'appellation *produit mixte*.

Remarque. On peut reformuler le résultat précédent en disant que, pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

Proposition. Dans le même contexte, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$:

$$[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)] = \det(u) \times [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\det_{\mathcal{B}_1}(u_1, u_2)$$

Preuve: $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{\substack{\uparrow \\ \det P \text{ où } P = \text{lan}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')}} \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées

et $\det P > 0$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont directes

or $\forall P \in O_n(\mathbb{R}), \det P = \pm 1$

donc $\det P = 1$

6 Étude des isométries vectorielles

6.1 Isométries vectorielles en dimension 2

6.1.1 Étude des isométries vectorielles directes

Théorème.

Soit $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

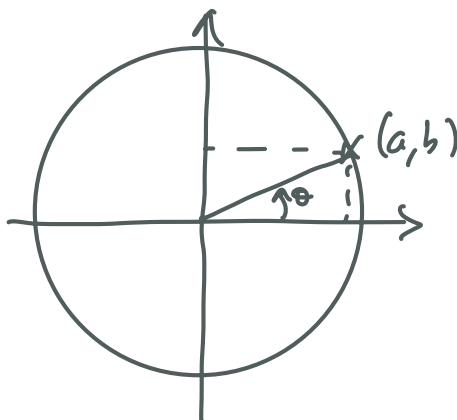
Preuve:

$$\text{Soit } M \in \text{SO}_2(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

donc les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
directe

$$\text{ie } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \|C_1\|^2 &= 1 \\ \|C_2\|^2 &= 1 \\ \langle C_1 | C_2 \rangle &= 0 \\ \det M &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{De (1)} \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tq } a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta$$



$$\text{De (2)} \quad \exists \varphi \in \mathbb{R} \text{ tq } c = \cos \varphi, \quad d = \sin \varphi$$

$$\text{Dnc (3)} \quad \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$$

$\parallel$
 $\cos(\theta - \varphi)$

$$\text{donc } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{et } \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} - k\pi$$

$$\text{Donc (4) } \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi = 1$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\sin(\varphi - \theta)$$

$$\text{donc } \exists p \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2p\pi$$

$$\text{donc } c = \cos \varphi$$

$$= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} + 2p\pi \right)$$

$$= -\sin \theta$$

$$\text{et } d = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} + 2p\pi \right)$$

$$= \cos \theta$$

CC: $\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ s.t. } M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

↑
notée $R(\theta)$

Corollaire.

- L'application : $R : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$
 $\theta \mapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
dans $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
- L'application : $\mathbb{U} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$ est correctement définie, et est un isomorphisme de groupes
 $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Corollaire. $(\text{SO}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

Remarque. C'est une propriété tout à fait spécifique à la dimension 2.

Preuve: $R : \mathbb{R} \longrightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$
 $\theta \longmapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- R est surjective par ce qui précède.

- Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$R(\theta) R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$= R(\theta + \varphi)$$

- $\theta \in \text{Ker } R \Leftrightarrow R(\theta) = I_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = 2k\pi$$

$$\text{Donc } \text{Ker } R = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Corollaire

$(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ groupe commutatif

Preuve:

$$\begin{aligned} R(\varphi) \times R(\theta) &= R(\varphi + \theta) \\ &= R(\theta + \varphi) \\ &= R(\theta) \times R(\varphi) \end{aligned}$$

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Si $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que la matrice de u soit, dans n'importe quelle base orthonormée directe de E :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Définition. On dit que u est la **rotation vectorielle d'angle orienté θ** .

Preuve: Soit E euclidien de dim 2

B base orthonormée directe

$$u \in SO(E)$$

$$M = \text{Mat}(u, B)$$

Alors $M \in SO_2(\mathbb{R})$ donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice est indép du choix de B .

En effet Soit B' autre base orthonormée directe

$$P = \text{Pass}(B \rightarrow B')$$

$\in SO_2(\mathbb{R})$ car matrice de passage
entre 2 bases orthonormées
directes.

$$\text{donc } \exists \varphi \in \mathbb{R} \quad P = R(\varphi)$$

$$\text{On note } M' = \text{Mat}(u, B')$$

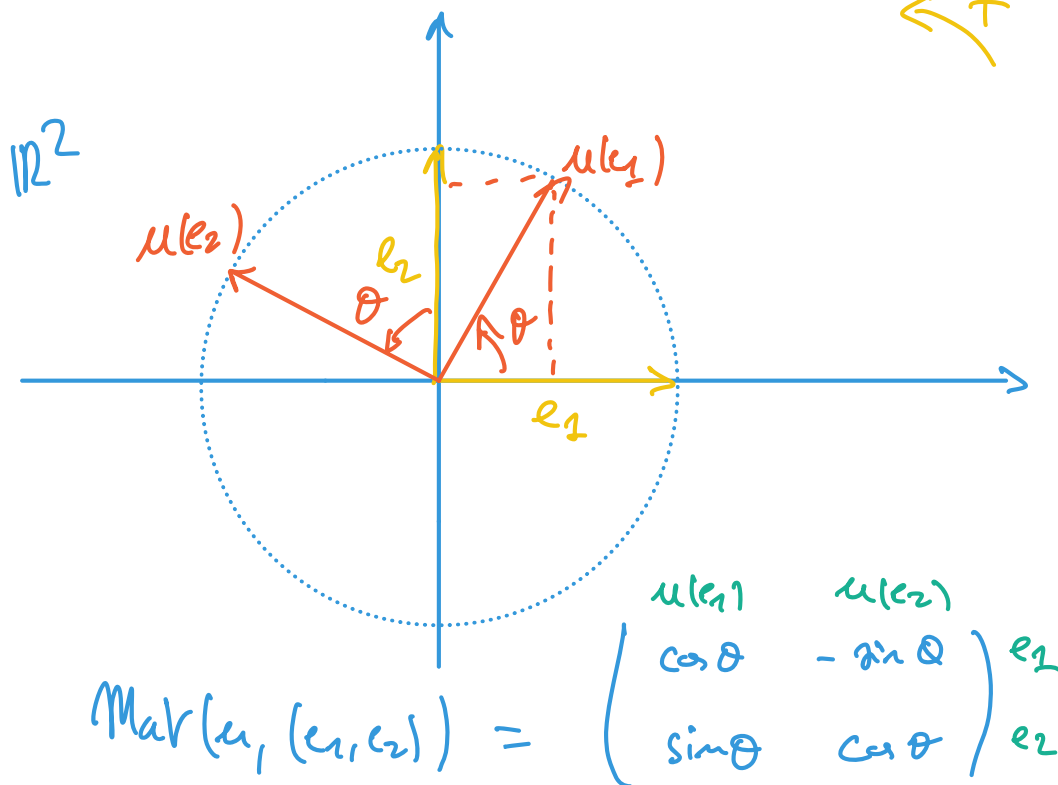
Par la formule de changement de base

$$M = P M' P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ie } M' &= P^{-1} M P = P^{-1} P \text{ car } SO_2(\mathbb{R}) \text{ commutatif.} \\ &= R(\varphi)^{-1} R(\theta) R(\varphi) \\ &= R(-\varphi) R(\theta) R(\varphi) \\ &= R(-\varphi + \theta + \varphi) \\ &= R(\theta) \\ &= M \end{aligned}$$

Définition avec $\theta \in \mathbb{R}$ $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = R(\theta)$
↑
 base orthogonale directe

On dit que u est la rotation d'angle θ
↑
 vectorielle
← +



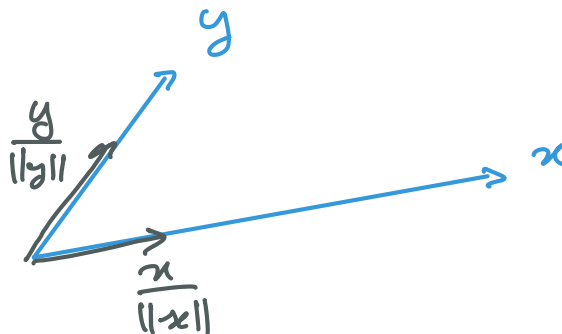
6.1.2 Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls

Définition. Si x, y sont deux vecteurs unitaires de E un espace euclidien orienté de dimension 2, alors il existe une unique rotation $u \in \text{SO}(E)$ telle que $y = u(x)$.

Si x, y deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté** (x, y) tout réel θ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.

On a les relations :

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad \text{et} \quad [x, y] = \|x\| \|y\| \sin \theta$$



$\frac{x}{\|x\|}$ unitaire, on le complète en $(\frac{x}{\|x\|}, e_2) = \mathcal{B}_1$
base orthogonale directe de E

$\frac{y}{\|y\|}$ unitaire, on le complète en $(\frac{y}{\|y\|}, f_2) = \mathcal{B}_2$
base orthogonale directe de E

$$\text{Pan}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } \exists \theta \text{ tq } \text{Pan}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = R(\theta)$$

$$\text{On note } u \in \text{SO}(E) \text{ tq } \text{Mat}(u, \mathcal{B}_1) = R(\theta)$$

$$\text{Alors } u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$$

$\rightarrow$ l'angle est défini par $R(\theta)$, donc à 2π près
(Vér $R = 2\pi \mathbb{Z}$)

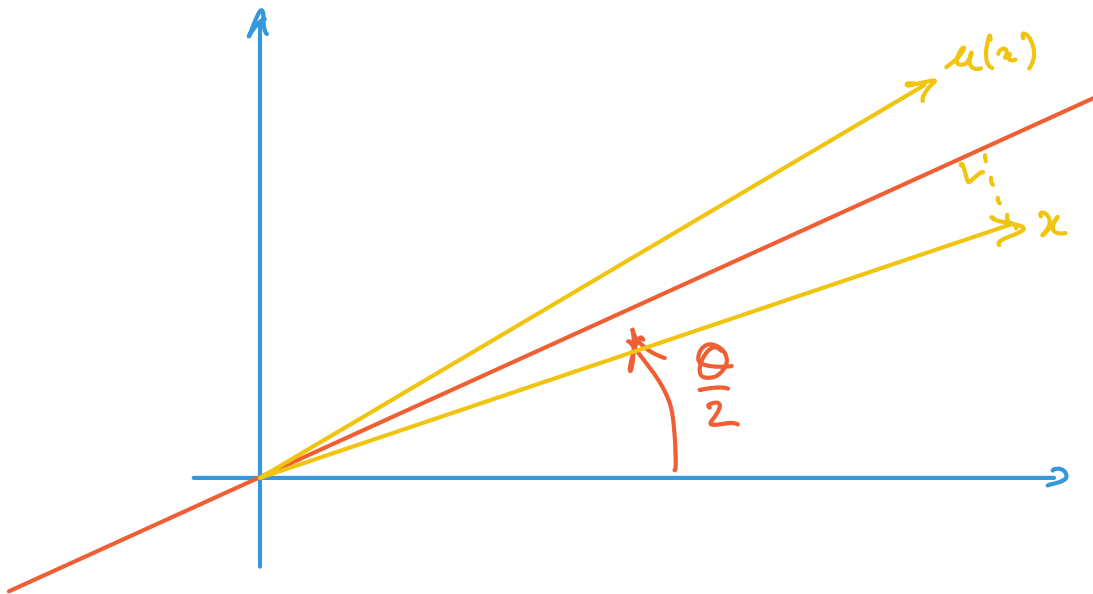
6.1.3 Étude des isométries vectorielles indirectes

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E .

- u est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

et u est la réflexion par rapport à la droite dirigée par $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.



Remarque: $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
 $\in O_2(\mathbb{R}) \quad (\det M = -1)$

Alors! M symétrique

$u \in O(E)$ isométrie vecto

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \forall x$$

donc $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$

la spectral $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^T$

Remarque: Ah tiens! M symétrique et orthogonale

$$\begin{array}{c} M^T M = I_2 \\ \parallel \\ M^2 \end{array}$$

donc M est une matrice de symétrie :

$$u \circ u = \text{Id}_E$$

$$\text{le spectral : } E_1(u) \oplus E_{-1}(u) = E$$

$$\begin{aligned} \text{Pour voir que } E_1(M) &= \text{Ker}(M - \text{Id}_E) \\ &= \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{on résout le système } \begin{pmatrix} M - \text{Id}_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[...]

Bref: Si E euclidien de dim 2

$$u \in O(E)$$

$$\text{1^{er} cas } u \in SO(E)$$

$\exists \theta$ $\forall \mathcal{B}$ base orthonormée directe

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2^{es}

$$u \in O(E) \setminus SO(E)$$

$\forall B$ base orthonormée directe, $\exists \theta \in$

$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$\exists B$ base orthonormée directe $\{$

$$\text{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\}$ u sym orthogonale (réflexion)

6.2 Réduction des isométries en dimension n

Lemme. Soit $u \in O(E)$

- Si F un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .
- Il y a au moins un plan ou une droite stable par u .
- Les seules valeurs propres (réelles) possibles pour u sont 1 et -1 .

③ Si λ vp de u , $\exists x \neq 0$ $\S$ $u(x) = \lambda x$

$$\text{donc } \begin{array}{c} \|u(x)\| \\ \|x\| \end{array} = |\lambda| \frac{\|x\|}{\|x\|}$$

$$\text{avec } x \neq 0 \quad \text{donc } |\lambda| = 1$$

④ On suppose F stable par u

$$\text{Soit } x \in F^\perp \quad \text{Alors } u(x) \in F^\perp$$

$$\text{Soit } y \in F \quad \text{Alors } u(x) \perp y$$

On veut écrire $y = u(t)$ où $t \in F$

$u_F : F \longrightarrow F$ endomorphisme induit par u sur F
est une isométrie vectorielle donc

$$\text{bijective donc } \exists t \in F \text{ $\S$ } y = u_F(t) = u(t)$$

On calcule alors

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle$$

$$= \langle x, t \rangle \quad \text{car } u \in O(E)$$

$$= 0 \quad \text{car } x \in F^\perp, t \in F$$

CQ : $F^\perp$ stable par u

(2) Soit $u \in O(E)$

1^{er} cas Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ v.p. de u ($\lambda = \pm 1$)

alors $\exists x \in E \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$

donc $\text{Vect}(x)$ stable par u
d'où $\text{Vect}(x)$

2^{es} cas On suppose $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$

Raisonnons que $u + u^*$ est autoadjoint

donc $\exists \lambda$ v.p. réelle de $u + u^*$

$\exists x \neq 0$ tq $(u + u^*)(x) = \lambda x$

Pcar, $u \in O(E)$ donc $u^* = u^{-1}$

On note $P = \text{Vect}(x, u(x))$

- $x, u(x)$ non colinéaires car
on est dans le cas où u n'a pas
de v.p. réelle.

Donc $\dim P = 2$

- Montrons que P est stable par u

* $u(x) \in P$

* $u(u(x)) = u(\lambda x - u^{-1}(x))$

$$= \lambda u(x) - x$$

$$\in P$$

Donc P est stable par u .

Théorème.

Soit E un espace euclidien, $u \in O(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E , des entiers m, p, q et des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que, par blocs :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_m} & \\ & & & -I_p \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

Remarque. Si $u \in SO(E)$, alors l'entier p est pair.

Version matricielle. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et Q de la forme ci-dessus telles que :

$$M = PQP^{-1} = PQP^T$$

Preuve: par récurrence sur $\dim E$

- Si $\dim E = 1$, $u \in O(E)$

$$\forall x \in E, x \neq 0, u(x) \in E = \text{Vect}(x)$$

donc $\exists \lambda \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda = \pm 1$

- Si $\dim E = 2$ c'est l'étude du § 61.

$\exists \mathcal{B}$ base orthonormée directe

$$\hookrightarrow \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai dans tout espace euclidien de $\dim \leq n$.
Soit E euclidien de $\dim n+1$.

$$\text{et } u \in \mathcal{O}(E)$$

Par le lemme, $\exists F$ sous-espace de E

de $\dim 1$ ou 2 , stable par u et

$F^\perp$ est stable par u .

1^{er} cas si $\dim F = 1$

* par H.R. $\exists u_{F^\perp}$ où $\dim F^\perp = n$

$\exists \mathcal{B}_1$ base orthonormée directe de $F^\perp$

$\hookrightarrow \text{Mat}(u_{F^\perp}, \mathcal{B}_1)$ a la forme décrite

* F direct vector stable par u donc

$\exists \mathcal{B}_2 = (e)$ base orthonormée de F

où e vecteur propre de u

$$\text{i.e. } u(e) = \pm 1 e$$

Alors $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ a la forme décrite.

$$\begin{pmatrix} \text{Mat}(u_F, B_1) & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}$$

2^e cas si $\dim F = 2$

* par HR à $e_{F^\perp}$ où $F^\perp$ de dim $n-1$

$\exists B_1$ base orthogonale de $F^\perp$ $\S$

$\text{Mat}(e_{F^\perp}, B_1)$ a la forme décrite

* par l'étude du § 6.1 (à cas $n=2$)

$\exists B_2$ base orthogonale de F $\S$

$$\text{Mat}(u_F, B_2) = \begin{pmatrix} R(\theta) \end{pmatrix}$$

ou

$$\text{Mat}(u_F, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors $\text{Mat}(u, B_1 \cup B_2)$ est de la forme décrite
(quitte à réorganiser l'ordre des vects).

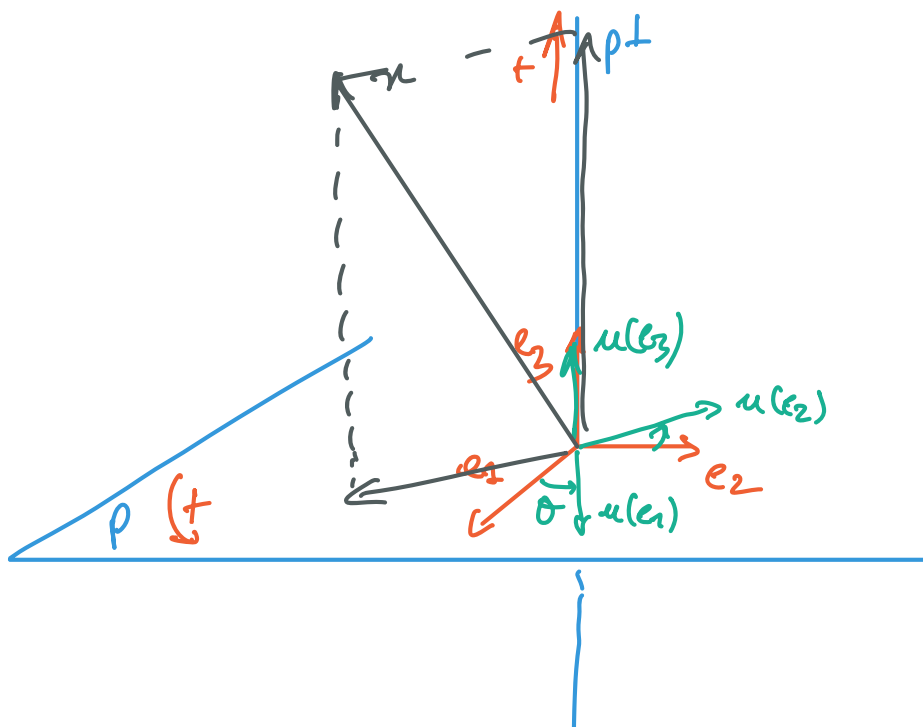
6.3 Cas particulier de la dimension 3

Proposition. Soit E un espace euclidien de dimension 3, $u \in \text{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque.

- Contrairement au cas de la dimension 2, la forme de la matrice de u dépend fortement de la base choisie.
- Si l'on écarte le cas où $u = \text{Id}_E$, on constate que $\text{Vect}(e_3)$ est la droite des vecteurs invariants par u . $F = \text{Vect}(e_3)^\perp$, orienté par e_3 , est stable par u , et l'endomorphisme induit u_F est une rotation vectorielle d'angle θ .
On dit que u est **la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3 et d'angle θ** .
- Le programme officiel indique que « la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme ».
- On doit néanmoins savoir trouver l'axe d'une rotation (c'est $E_1(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$), et dire que l'angle vérifie $2 \cos \theta + 1 = \text{tr}(u)$, ce qui donne l'angle au signe près.



320.20

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- On note C_1, C_2, C_3 les colonnes.

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{81} (8 - 16 + 8) = 0$$

$$\langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = \frac{1}{81} (-4 - 28 + 32) = 0$$

$$\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \frac{1}{81} (64 + 16 + 1) = 1$$

$$\|C_3\|^2 = \frac{1}{81} (16 + 49 + 16) = 1$$

$$\text{Donc } \underline{M \in O_3(\mathbb{R})}$$

- Donc $M = P_{\text{pass}} \left(\begin{matrix} \text{base orthonormée.} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{can} \rightarrow (C_1, C_2, C_3) \end{matrix} \right)$

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (C_1, C_2, C_3) \text{ base directe}$$

$$\Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2$$

$$(\text{car } C_3 = \pm C_1 \wedge C_2)$$

$$\text{ici } 8 \times 4 + 4 = 36 \text{ vgn que } 4$$

$$\text{Donc } M \in SO_3(\mathbb{R})$$

$$\det M = +1$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad E_1(M) &= \text{Ker}(M - I_3) \\
 &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & -5 & -7 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\
 &= \text{Vect} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3}
 \end{aligned}$$

• Soit (e_1, e_2) & (e_1, e_2, e_3) bases orthonormées directes.

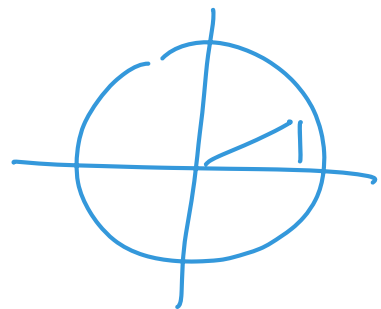
Par ex: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$e_2 = e_3 \wedge e_1 = \dots \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\exists \theta \text{ t.q. } \text{Mat}(u, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|u| = 2 \cos \theta + 1$$

" $\frac{16}{9}$

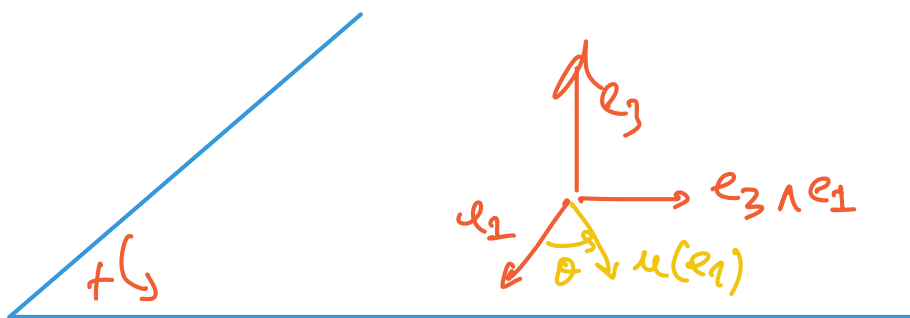


donc $\cos \theta = \frac{7}{18}$

donc $\theta = \pm \arccos \frac{7}{18}$

u est la rotation d'axe dirigé et centré par
 $e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'angle $\theta = \pm \arccos \frac{7}{18}$

$\uparrow \phi$ $\uparrow$
 $\quad \quad \quad + \text{ ou } - ?$



$$\sin \theta = \langle u(e_1) \mid e_3 \wedge e_1 \rangle$$

$\uparrow$ signe à déterminer

$\rightarrow$ d'où le signe de θ .