

Soutenances TPE : envoyer diaporama

Une détermination d'espace tangent

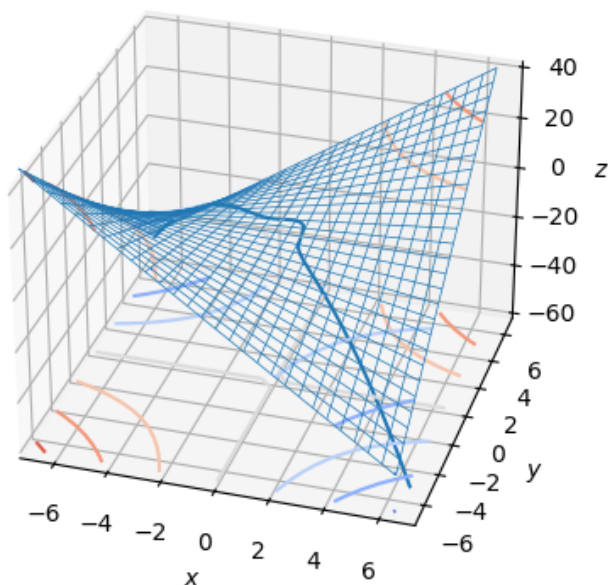
720.4

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n .

Une optimisation sous contrainte

730.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ .



$$\text{On note } g(x, y) = x^3 + y^3 - 1$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Analyse On suppose que f admet un maximum sous la contrainte Γ en (x, y) .

Donc $\nabla f(x, y)$ et $\nabla g(x, y)$ sont colinéaires

$$\text{c'est-à-dire } \begin{vmatrix} 3x^2 & y \\ 3y^2 & x \end{vmatrix} = 0$$

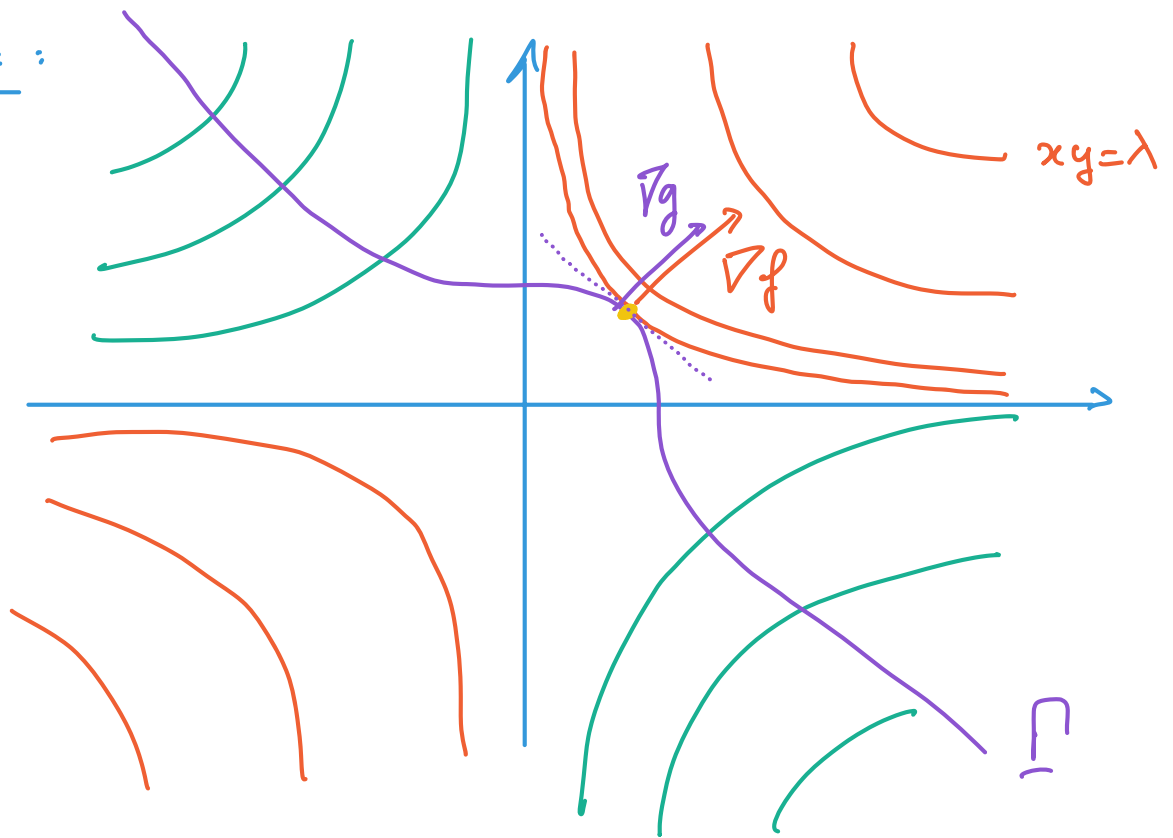
$$\text{c'est-à-dire } x^3 - y^3 = 0$$

$$\text{donc } x = y$$

$$\text{or } (x, y) \in \Gamma \text{ donc } x^3 + x^3 = 1$$

$$\text{c'est-à-dire } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = y$$

Synthèse :



Par $(x < 0, y > 0)$ et pour $(x > 0, y < 0)$,
 $f(x, y) < 0 < f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$

$$\Gamma \cap (x < 0, y < 0) = \emptyset$$

car si $x < 0$ et $y < 0$, $x^3 + y^3 < 0 < 1$

$$\Gamma \cap (x \geq 0, y \geq 0) = \Gamma \cap [0, 1]^2$$

car si $(x, y) \in \Gamma$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$x^3 = 1 - y^3 \leq 1 \text{ donc } x \leq 1$$

de même pour y

Où $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ où g continue

donc Γ est fermé

donc $\Gamma \cap [0,1]^2$ compact comme l'intersection

fermée d'un compact.

Donc $f|_{\Gamma \cap [0,1]^2}$ admet un maximum
par continuité de f (théorème des bornes atteintes)
atteint en (x_0, y_0)

$$f(x_0, y_0) = x_0 y_0 \geq 0 > f(x, y) \quad \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0$$

Donc $f|_{\Gamma}$ présente un maximum en (x_0, y_0)

Par l'analyse, on a donc $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$

Optimisation

2.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Remarque. Aucun résultat spécifique n'est à connaître. Fréquemment, on applique un changement de variable (et donc un changement de fonction inconnue) pour se ramener à une équation plus simple, ne faisant intervenir que les dérivées partielles par rapport à une seule variable, comme par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont, sur un ouvert convexe, les fonctions « constantes en x », c'est-à-dire telles qu'il existe φ :

$$\forall x, y, f(x, y) = \varphi(y)$$

Exemple. Effectuer le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ pour résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

$$\text{On pose } f(x, y) = g(u, v)$$

$$= g(x, y - x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y - x) - \frac{\partial g}{\partial v}(x, y - x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial v}(x, y - x)$$

f solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x, y-x) = f(x, y) = g(x, y-x)$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v)$$

$$(x, y) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow (u, v-x) \text{ parcourt } \mathbb{R}^2$$

le changement de variable est bijectif.

On reconnaît, à v fixé, une eq. diff. linéaire

$$\text{d'ordre 1 homogène en } g(\cdot, v) \quad y' - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad g(u, v) = \lambda(v) e^u$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

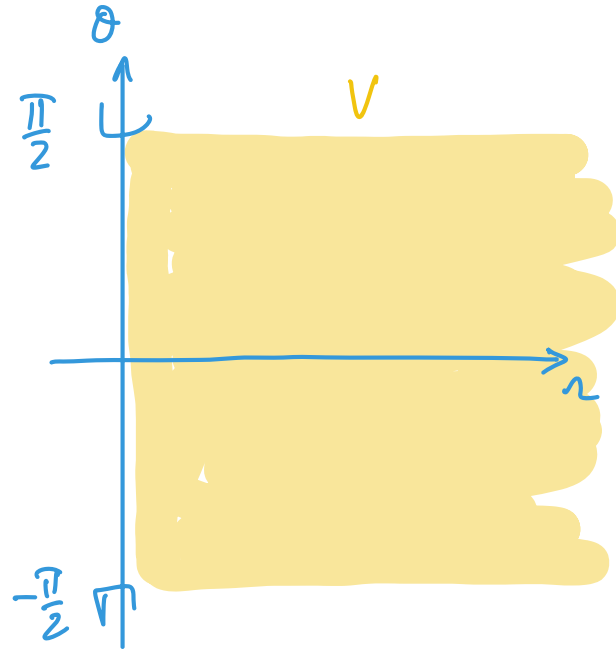
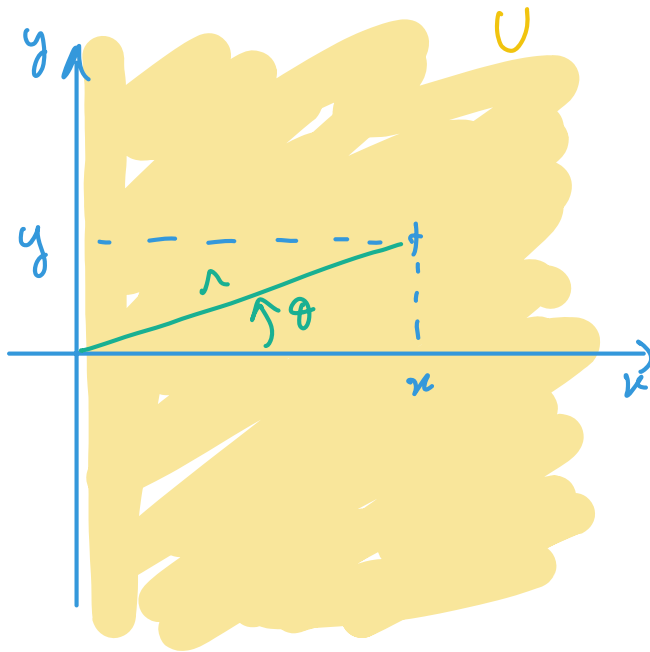
$$f(x, y) = \lambda(y-x) e^x$$

Rmg: il y a beaucoup de solutions !!

Exemple. Résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} f$$

en passant en coordonnées polaires.



On note $\varphi: V \longrightarrow U$

$$(r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

φ est bijective, de réciproque

$$\varphi^{-1}: U \longrightarrow V = [\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$(x, y) \longmapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arctan}(\frac{y}{x}))$$

On effectue le changement de fonction inconnue

$$f(x, y) = g(r, \theta)$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

On calcule

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$f \text{ sol} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in U \quad -y \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x} f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall (r, \theta) \in U \quad & -r \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ & + r \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ & = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall (r, \theta) \in U \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \tan \theta g(r, \theta)$$

On remarque, à r fixé, une E.D. linéaire d'ordre 1 homogène

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \quad \forall (r, \theta) \in U :$$

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= \lambda(r) e^{-\int -\tan \theta d\theta} \\ &= \lambda(r) e^{-\ln |\cos \theta|} \\ &= \frac{\lambda(r)}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \quad \& \quad \forall (x, y) \in U$$

$$f(x, y) = \frac{\lambda(x^2 + y^2)}{\cos(\text{Arctan}(\frac{y}{x}))}$$

on peut simplifier $\cos(\text{Arctan}(\frac{y}{x})) = \dots$

Exemple. Pour $c \in \mathbb{R}$, poser $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ pour résoudre l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{On pose } f(x, t) = g(u, v) \quad M = (u - ct, u + ct)$$

$$= g(u - ct, u + ct)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, t) = 1 \frac{\partial g}{\partial u}(u) + 1 \frac{\partial g}{\partial v}(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, t) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(u, t) = -c \frac{\partial g}{\partial u}(u) + c \frac{\partial g}{\partial v}(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(u, t) = (-c)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u) - c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u) - c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u) + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u)$$

$$f \text{ sol de } (E) \Leftrightarrow \forall (u, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(u, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$

primitive à v fixé

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1 \quad \forall u, v \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \lambda(v)$$

primeira $\bar{a}$ e fixa

$$\Leftrightarrow \exists \Lambda \in \mathcal{E}^2, \exists \mu \in \cancel{\mathcal{E}^2} \mathcal{E}^2$$

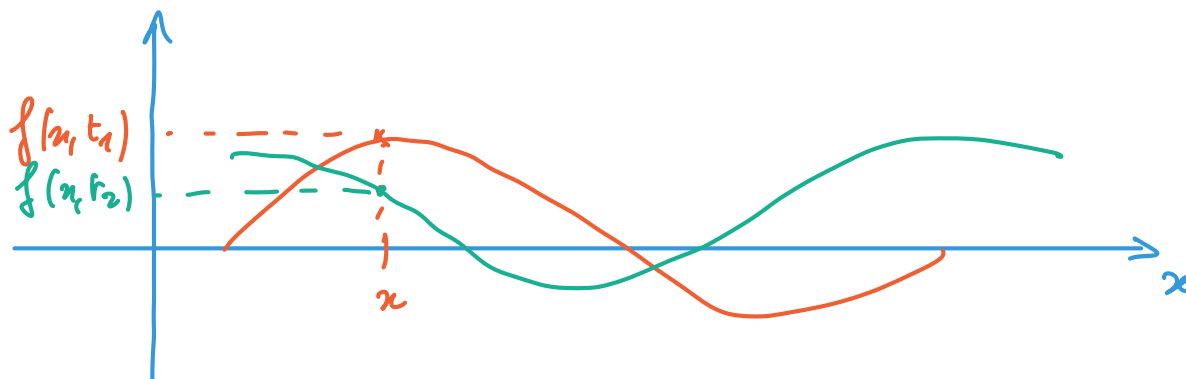
$$\exists \mu \in \mathcal{E} \quad g(u, v) = \Lambda(v) + \mu(u)$$

(ou $\Lambda' = \Lambda$)

$$\Leftrightarrow \exists \text{ duas funções } \mathcal{E}^2 \text{ } A, B \text{ tal}$$

$\forall x, y$

$$f(x, y) = A(x + ct) + B(x - ct)$$



Un exemple d'équation aux dérivées partielles

720.3

Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy$$

320

730.23

