

Sur qz: 671.27, 720.4

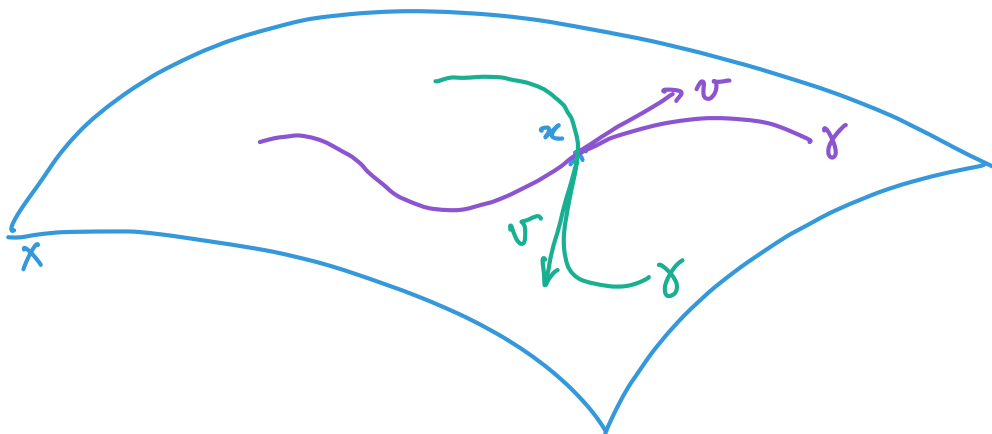
Calcul différentiel

5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

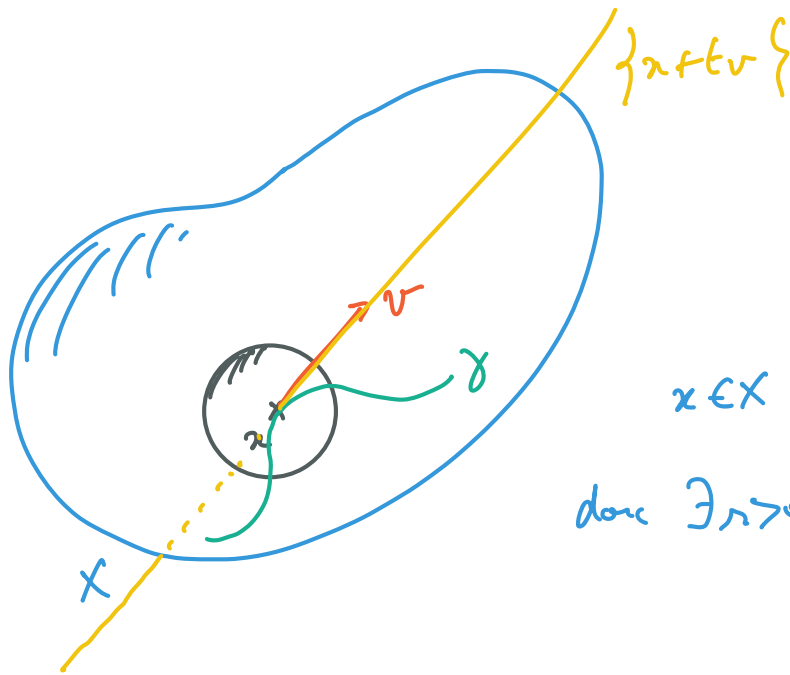
Définition. Soit X une partie non vide de E et $x \in X$.

On dit qu'un vecteur $v \in E$ est **tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$, à valeurs dans X , dérivable en 0, et tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x .



Exemple. Pour X est un ouvert de E et $x \in X$, déterminer $T_x X$.



donc $\exists r > 0$ $\forall B(x, r) \subset X$

Montrons $T_x X = E$

Soit $v \in E$. On suppose $v \neq 0$

On définit $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow E$

$$t \longmapsto x + tv$$

- $\gamma(0) = x$
- $\gamma'(0) = v$
- $\forall t \quad \gamma(t) \in X$?

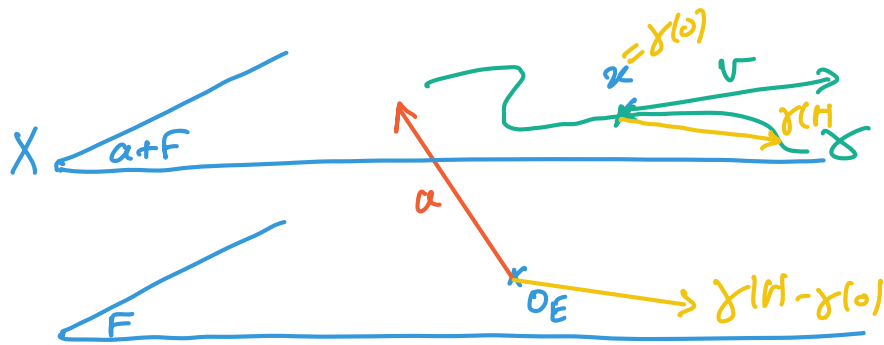
$$\|x + tv - x\| = |t| \|v\|$$

donc, pour $t \in]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}[$

on a $\gamma(t) \in B(x, r) \subset X$

donc $v \in T_x X$

Exemple. Pour $X = a + F$ sous-espace affine de E et $x \in X$, déterminer $T_x X$.



Analyse

Soit $v \in T_x X$

Donc $\exists \varepsilon > 0 \exists \gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \cancel{X} E$
 $t \mapsto \gamma(t)$

q $\begin{cases} \forall t \gamma(t) \in X \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$

$\gamma'(0)$ est la limite, pour $t \rightarrow 0$, de $\frac{1}{t} (\gamma(t) - \gamma(0))$

$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$

$$\frac{1}{t} (\gamma(t) - \gamma(0)) = \frac{1}{t} (a + (\gamma(t) - a) - a - (\gamma(0) - a))$$

$$= \frac{1}{t} \left(\underbrace{(\gamma(t) - a)}_{\substack{\in F \\ \text{car } \gamma(t) \in X}} - \underbrace{(\gamma(0) - a)}_{\substack{\in F \\ \text{car } \gamma(0) = x \in X}} \right)$$

$\in F$ car F stable par CL

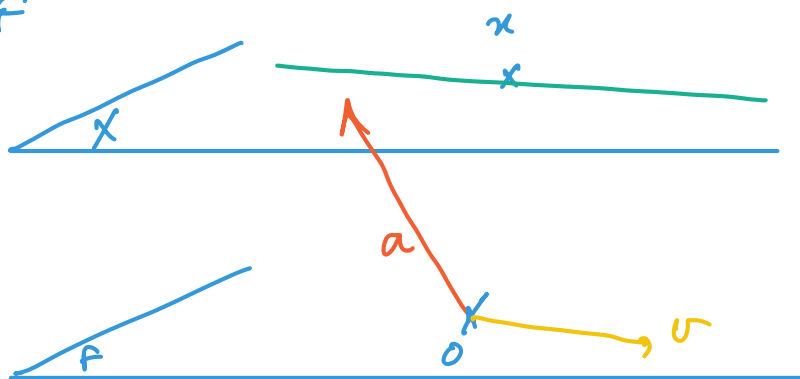
or F est un ev de dim finie, donc est fermé

donc, à la limite, $\gamma'(0) \in F$.

Ainsi $T_x X \subset F$

Synthèse

Soit $v \in F$



Posons

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow E$$
$$t \longmapsto x + tv$$

(on paramétrise la droite passant par x
dirigée par v)

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = x + tv$$

$$= a + \underbrace{(x-a)}_{\in F} + \underbrace{tv}_{\in F}$$
$$\in X$$

$$\bullet \gamma(0) = x$$

$$\bullet \gamma'(0) = v$$

$$\text{Donc } v \in T_x X$$

$$\underline{\text{CQ}} \quad T_x X = F$$

Propriété E euclidien

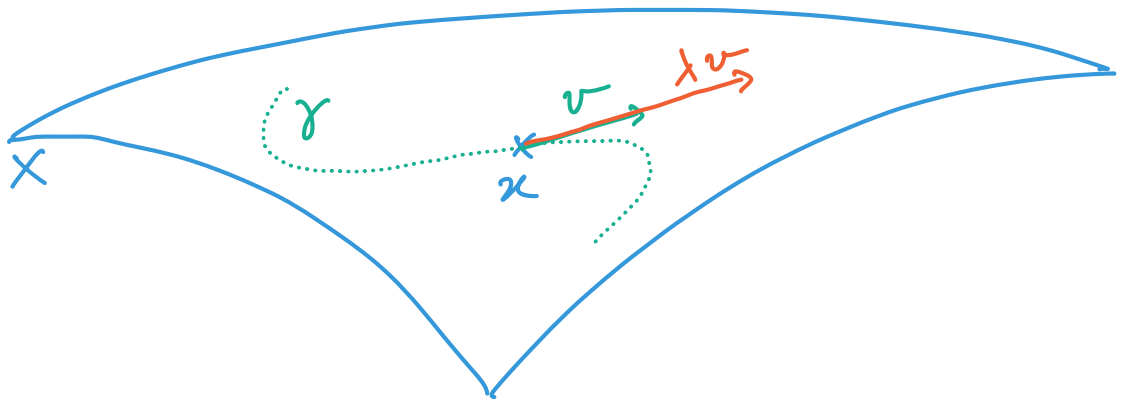
$T_x X$ est stable par mult. par $\lambda \in \mathbb{R}$

Preuve:

On veut montrer que:

$$v \in T_x X \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda v \in T_x X$$

Soit $v \in T_x X$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Il existe $\varepsilon > 0$ $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$

$$\forall t \quad \gamma(t) \in X, \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma'(0) = v$$

Posons: $\varphi:]-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}[\rightarrow E$
 $t \mapsto \gamma(\lambda t)$

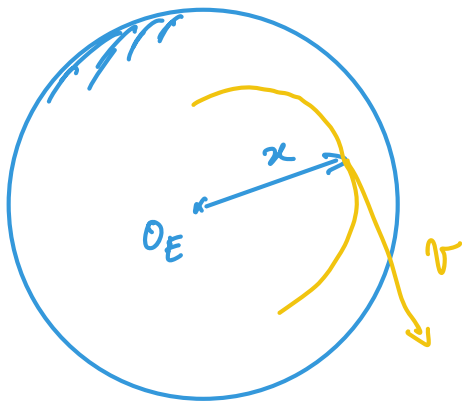
$$\forall t, \quad \varphi(t) = \gamma(\lambda t) \in X$$

$$\varphi(0) = \gamma(0) = x$$

$$\forall t \quad \varphi'(t) = \lambda \cdot \gamma'(\lambda t)$$

$$\text{donc } \varphi'(0) = \lambda \cdot \gamma'(0) = \lambda v$$

Exemple. Lorsque E est euclidien, $X = S(0, 1)$ la sphère unité et $x \in X$, déterminer $T_x X$.



Soit $x \in S(0, 1)$

Analyse Soit $v \in T_x X$

Donc $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow E$ $\hookrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \quad \gamma(t) \in S(0, 1) \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{array} \right.$$

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \|\gamma(t)\|^2 = 1$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$$

$$\text{donc } \forall t \quad 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$$

en particulier en $t=0$

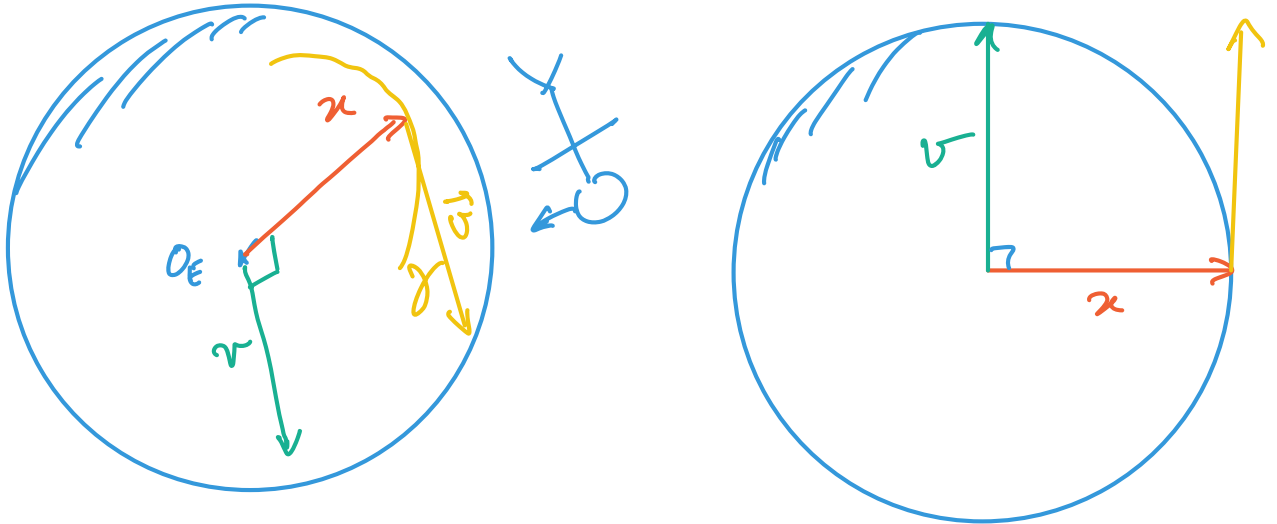
$$\langle v, x \rangle = 0$$

Ainsi $T_x X \subset \text{Vect}(x)^\perp$

Synthèse

Soit $v \in \text{Vect}(x)^\perp$

1^{er} cas on suppose v unitaire



On pose $\gamma: t \mapsto \cos t \, x + \sin t \, v$

$$\bullet \forall t \quad \|\gamma(t)\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t \\ = 1$$

car $\gamma(t) \in \text{Vect}(x, v) = P$

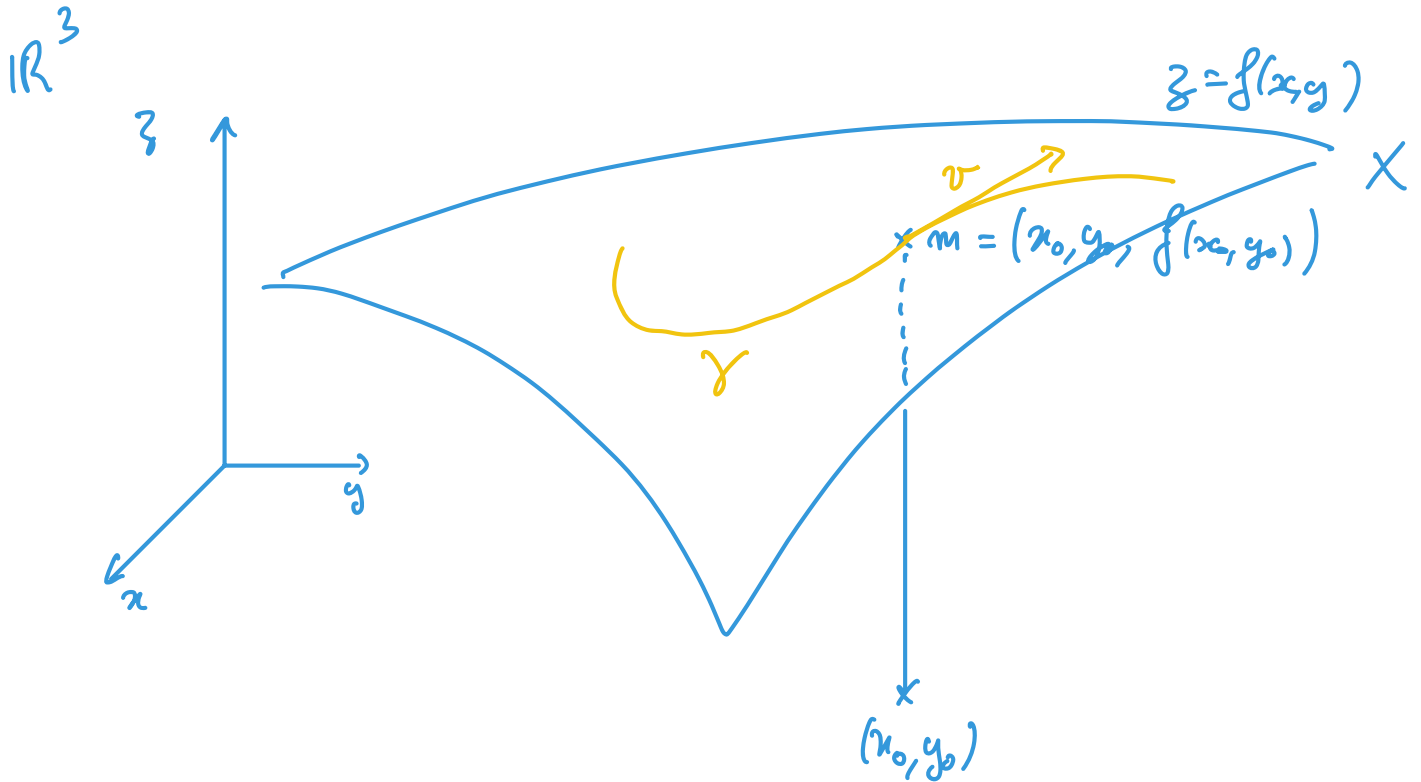
et x, v est une base orthonormée de P

$$\bullet \gamma(0) = 1 \, x + 0 \, v \\ = x$$

$$\bullet \forall t \quad \gamma'(t) = -\sin t \, x + \cos t \, v$$

$$\gamma'(0) = v \quad \text{donc } v \in T_x X$$

Exemple. Pour $E = \mathbb{R}^3$, X graphe d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert U et $m \in X$, montrer que $T_m X$ est un plan vectoriel.



Analyse: Soit $v \in T_m X$

donc $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \forall t \quad \gamma(t) \in X \\ \gamma(0) = m \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

On note $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

on a $z(t) = f(x(t), y(t))$ car $\gamma(t) \in X$

Donc $\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$

donc

$$\gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t), x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right)$$

en part $v = \gamma'(0)$

$$= (x'(0), y'(0), x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

$$= x'(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + y'(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Ainsi $T_m X \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right)$

Synthese

Soit $v \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right)$

il $\exists \alpha, \beta$ tq $v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

On pose:

$$\gamma: t \mapsto (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t))$$

Uniquement, continu (x_0, y_0)

donc γ est défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon [$ pour ε assez petit.

- $\forall t \quad \gamma(t) \in X$

- $\gamma(0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = m$

$$\bullet \gamma'(t) = \left(\alpha, \beta, \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\dots) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(\dots) \right)$$

dont $\gamma'(0) = v$

Cl $T_m X$ est bien le plan vecto obtenu

Théorème.

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U . On considère l'ensemble :

$$X = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

Si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$, alors :

$$T_x X = \text{Ker}(dg(x))$$

C'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Corollaire. Lorsque E est euclidien, la différentielle peut être représentée par le gradient :

Si $x \in X$ et $\nabla g(x) \neq 0_E$, alors :

$$T_x X = (\nabla g(x))^\perp$$

C'est un hyperplan, et $\nabla g(x)$ en est un vecteur orthogonal.

$$dg(x) = \langle \nabla g(x), \cdot \rangle$$

On justifie une inclusion :

$$\text{Si } v \in T_x X$$

$$\text{alors } \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow E$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \quad \gamma(t) \in X \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \forall t \quad g(\gamma(t)) = 0 \quad \text{car } X = \{x \mid g(x) = 0\}$$

ou donc :

$$dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

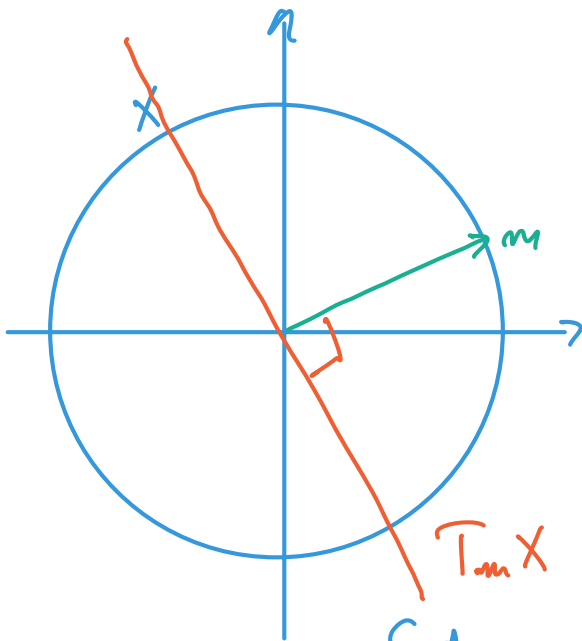
en part en $t=0$

$$dg(x) \cdot v = 0$$

$$\text{donc } v \in \text{Ker } dg(x)$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent en un point à l'ensemble :

$$X = \{(x, y), x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$



Soit $m = (x_0, y_0) \in X$

On note $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m) = 2x_0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(m) = 2y_0$$

$$\nabla g(m) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } T_m X &= \left(\nabla g(m) \right)^\perp \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}^\perp \\ &= \text{Vect} \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \{(x, y, z), \, x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent en $(0, 0)$ à l'ensemble :

$$X = \{(x, y), y^2 - 4(1 - x^2)x^2 = 0\}$$

Optimisation

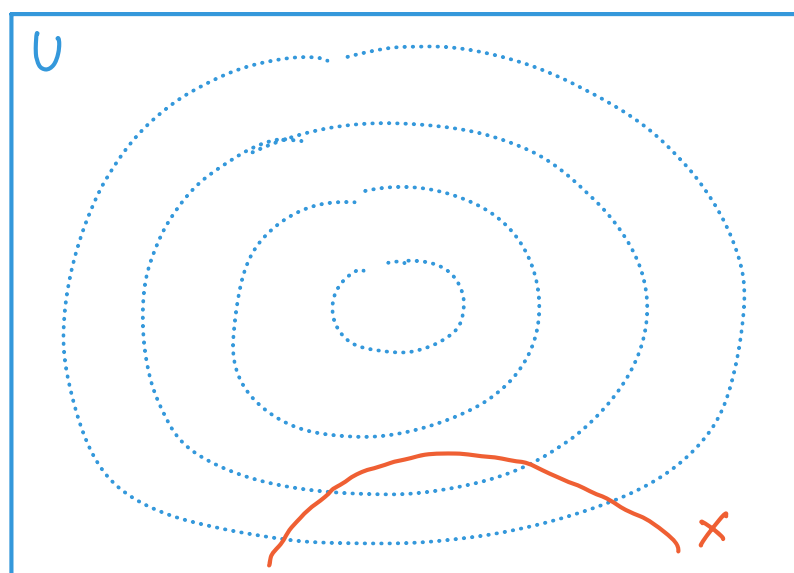
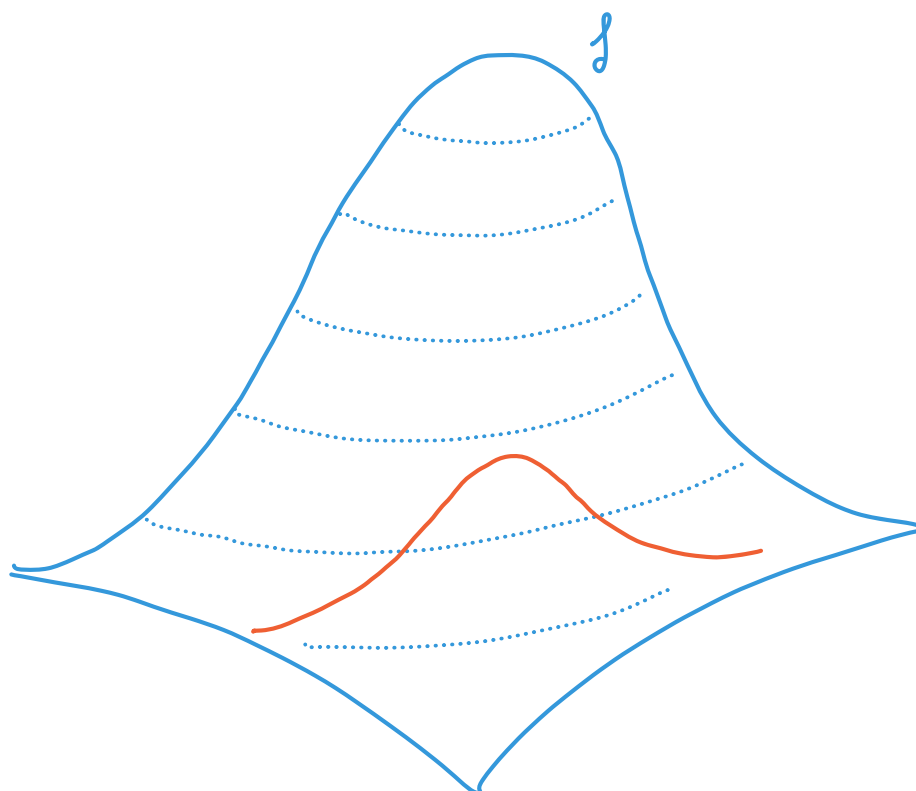
1.3 Optimisation sous contrainte

Présentation. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U .

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$X = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

L'équation $g(x) = 0$ s'appelle **une contrainte**, et on s'intéresse à la recherche des extremums de $f|_X$.



Exemple. Si g est affine, c'est-à-dire de la forme : $x \mapsto c + \ell(x)$ où $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on parle de **contrainte linéaire**.

Lemme. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U ouvert. Soit X une partie de U et $x \in X$.
Si $f|_X$ admet un extremum local en x , alors $df(x)$ s'annule sur $T_x X$:

$$\forall v \text{ tangent à } X, df(x) \cdot v = 0$$

$$T_x X \subset \text{Ker } df(x)$$

Preuve:

$$\text{Soit } v \in T_x X$$

$$\text{Donc } \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$$

$$\begin{cases} \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[& \gamma(t) \in X \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

$$\forall t, \gamma(t) \in X \text{ donc } f(\gamma(t)) \leq f(x)$$

(cas d'un maximum)

$$\text{or } f(\gamma(0)) = f(x)$$

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{donc } \varphi : t \mapsto f(\gamma(t)) \text{ admet un max en } 0$$

$$\text{donc } \varphi'(0) = 0$$

$$\text{or } \varphi'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\text{En part en } t=0 : df(x) \cdot v = 0$$

Théorème.

Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U . On note : $X = \{x \in U, g(x) = 0\}$.
Si :

- $x \in X$
- $f|_X$ admet un extremum en x
- $dg(x) \neq 0$

alors :

- $df(x)$ et $dg(x)$ sont colinéaires.

Remarque. La condition de colinéarité peut encore s'écrire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, df(x) = \lambda dg(x)$$

Le coefficient λ s'appelle un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte $g(x) = 0$.

Ce sont des éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

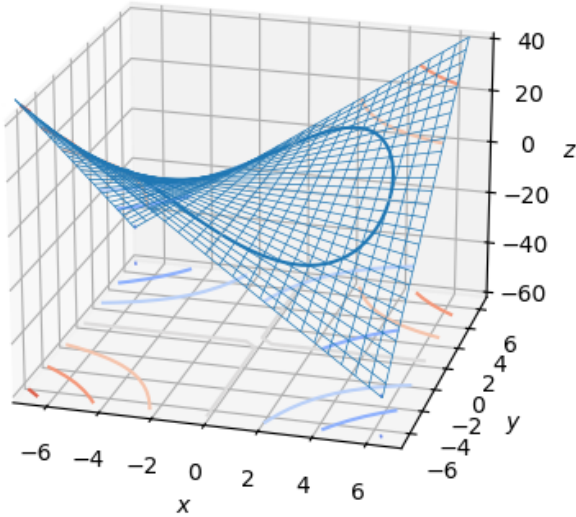
Proposition. Dans le cas où E est euclidien, par exemple lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la conclusion du théorème s'écrit :

$\nabla f(x)$ et $\nabla g(x)$ sont colinéaires

ou encore, puisque $\nabla g(x) \perp T_x X$:

$$\nabla f(x) \in (T_x X)^\perp$$

Exemple. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.



On pose $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

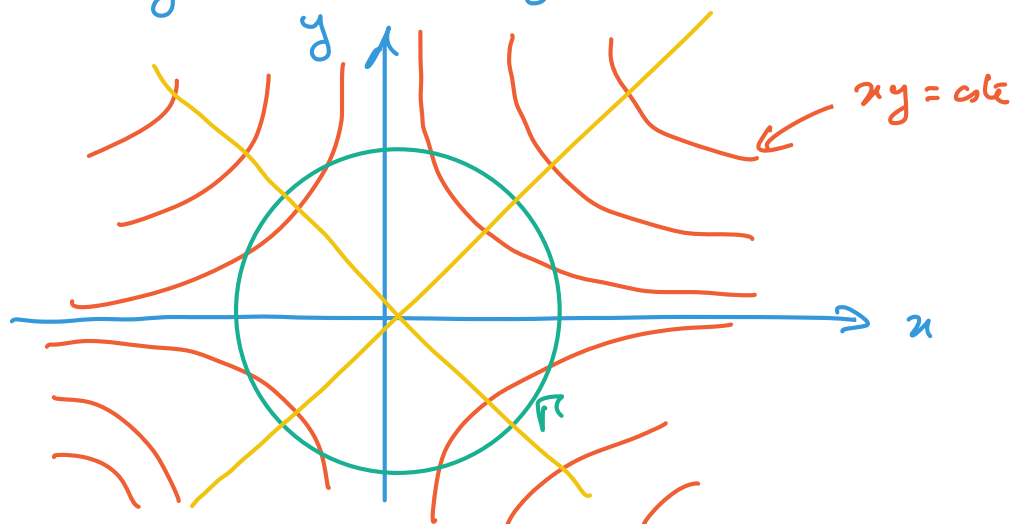
Analyse Si f admet un maximum sur la courbe Γ en (x, y)

Alors $\nabla f(x, y), \nabla g(x, y)$ colinéaires

donc $\begin{vmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{vmatrix} = 0$

soit $x^2 - y^2 = 0$

soit $x = y$ ou $x = -y$



$$\text{or } (x, y) \in \Gamma \text{ et } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Bref: } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

donc s'il y a un max sous contrainte, c'est $\frac{1}{2}$

atteint en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Synthèse X compact, f continue donc

$f|_X$ admet un maximum

d'où l'existence

CC: f admet un maximum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$, qui vaut $\frac{1}{2}$, atteint en ---

Remarque

On peut avoir une autre approche, en paramétrisant la contrainte.

$$\begin{aligned} X &= \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \} \\ &= \{ (\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi] \} \end{aligned}$$

On cherche le max de

$$\begin{aligned} t &\mapsto f(\cos t, \sin t) \\ &= \cos t \sin t \\ &= \frac{1}{2} \sin 2t \end{aligned}$$

Exemple. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ d'équation $x^3 + y^3 = 1$.

