

Rappel sur l'exponentielle de matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

- $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est $t \mapsto A \exp(tA) = \exp(tA)A$.
- $\exp(A)$ est inversible, et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.
- Si A et B sont deux matrices qui commutent :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$$

$$\text{Si } A = P A' P^{-1}$$

$$\text{alors } \exp(A) = P \exp(A') P^{-1}$$

En effet :

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (P A' P^{-1})^n$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} P (A')^n P^{-1}$$

(par réc, $A^n = P (A')^n P^{-1}$)

$$= P \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (A')^n \right) P^{-1}$$

car somme finie

Par continuité du produit matriciel, à la limite pour

$N \rightarrow +\infty$:

$$\exp(A) = P \exp(A') P^{-1}$$

3 Systèmes différentiels linéaires ~~homogènes~~ à coefficients constants

3.1 Position du problème

Définition.

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** :

$$X' = AX + B(t) \quad (S)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à (S)** :

$$X' = A \cancel{X} X \quad \text{ } \quad \textcolor{blue}{X' = AX} \quad (H)$$

Remarque. Un système différentiel linéaire à coefficients constant s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} sont des scalaires (constantes) et les b_i des fonctions continues sur I intervalle.

Écriture vectorielle. Un système différentiel linéaire à coefficients constant peut être vu comme la traduction matricielle d'une équation différentielle linéaire :

$$x' = a \cdot x + b(t) \quad (E)$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ est continue, et où on note $a \cdot x$ l'image $a(x)$ du vecteur x par l'endomorphisme a .

Proposition.

- L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n .
- L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension n , dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

3.2 Résolution théorique à l'aide de l'exponentielle de matrice

Résultat : solutions du système différentiel homogène.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions du système différentiel homogène :

$$X' = AX$$

sont les applications :

$$t \mapsto \exp(tA)C$$

où $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Remarque. Dans l'écriture précédente, $\exp(tA)$ désigne une matrice carrée, C une matrice colonne. On peut rapprocher l'expression des solutions de :

$$t \mapsto \lambda e^{ta}, \lambda \in \mathbb{K}$$

qui est l'expression des solutions de l'équation scalaire $y' = ay$, mais la généralisation doit se faire correctement.

Preuve: On veut montrer que

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{ t \mapsto \exp(tA) C, \quad C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \right\} \\ &= \text{Vect} \left(t \mapsto \exp(tA) E_1, \dots, t \mapsto \exp(tA) E_n \right) \\ &\quad \text{où } E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- On note $X_k = t \mapsto \exp(tA) E_k$
 $\forall t \quad X_k'(t) = A \exp(tA) \cdot E_k$
 $\quad \quad \quad = A X_k(t)$
donc les X_k sont solutions de (H)

- Il reste $(X_1, \dots, X_n)$ est libre :

$$\text{Soit } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tq } \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n = 0$$

$$\text{ie } \forall t \in I \quad \alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_n X_n(t) = 0$$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{I} \quad \alpha_1 \exp(tA) E_1 + \dots + \alpha_n \exp(tA) E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{I} \quad \underbrace{\exp(tA)}_{\text{invertible}} [\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_n E_n] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_n E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \text{car } (E_1, \dots, E_n) \text{ libre.}$$

- Comme $\dim S_H = n$, on a montré

$$S_H = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$$

Résultat : obtention d'une solution particulière par variation de la constante.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Pour résoudre le système différentiel à coefficients constants :

$$X' = AX + B(t) \tag{E}$$

on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$X(t) = \exp(tA)C(t)$$

où $C : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$.

3.3 Problème de Cauchy

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. On appelle **problème de Cauchy** le problème :

$$\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy linéaire.

Le problème de Cauchy admet une et une seule solution définie sur I .

$$\text{On pose } X(t) = \exp(tA) C(t)$$

"changeant de fonction inconnue".

$$X'(t) = A \exp(tA) C(t) + \exp(tA) C'(t)$$

X sol du pb de Cauchy

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in I & X'(t) = A X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in I & \exp(tA) C'(t) = B(t) \\ \exp(t_0 A) C(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in I & C'(t) = \exp(-tA) B(t) \\ C(t_0) = \exp(-t_0 A) X_0 \end{cases}$$

$$\text{Car } \exp(tA)^{-1} = \exp(-tA)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I$$

$$C(t) = \exp(-t_0 A) X_0 + \int_{t_0}^t \exp(-uA) B(u) du$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I$$

$$X(t) = \exp(tA) \exp(-t_0 A) X_0 \\ + \exp(tA) \int_{t_0}^t \exp(-uA) B(u) du$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I$$

$$X(t) = \exp((t-t_0)A) X_0$$

Car tA et $-t_0A$ commutent

$$+ \int_{t_0}^t \exp(tA) \left(\exp(-uA) B(u) \right) du$$

cf 470

Car $M \int_I V(t) dt = \int_I M V(t) dt$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I$$

$$X(t) = \exp((t-t_0)A) X_0 \\ + \int_{t_0}^t \exp((t-u)A) B(u) du$$

d'où existence et unicité

et justifie la "variante de la constante"

3.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité

On suppose dans ce paragraphe que A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = (V_1 | \dots | V_n)$$

Les λ_i sont les valeurs propres de A , et les V_i forment une base de vecteurs propres associés.

Méthode : résolution du système différentiel homogène (H) .

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, X'(t) = AX(t) \\ &\iff \forall t \in I, X'(t) = PDP^{-1}X(t) \\ &\iff \forall t \in I, Y'(t) = DY(t) \quad \text{où, pour tout } t, X(t) = PY(t) \\ &\iff \forall t \in I, \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, X(t) = (V_1 | \dots | V_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} \left(t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i \right)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

On a déterminé un système fondamental de solutions de (H) .

Méthode : recherche d'une solutions particulière.

Par variation de la constante, on cherche une solution sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} V_i$$

où les c_i sont des fonctions inconnues supposées de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule :

$$X'(t) = \sum_{i=1}^n c'_i(t) e^{\lambda_i t} V_i + \sum_{i=1}^n c_i(t) \lambda_i e^{\lambda_i t} V_i$$

$$\begin{aligned} \text{et } AX(t) &= A \left(\sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} V_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} A V_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} \lambda_i V_i \text{ car } V_i \text{ vecteur propre associé à la v.p. } \lambda_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X \text{ solution} &\iff \forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t) \\ &\iff \forall t \in I, \sum_{i=1}^n c'_i(t) e^{\lambda_i t} V_i = B(t) \\ &\iff \forall t \in I, \sum_{i=1}^n c'_i(t) e^{\lambda_i t} V_i = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) V_i \\ &\quad \text{où } (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)) \text{ sont les coordonnées de } B(t) \text{ dans } (V_1, \dots, V_n) \\ &\iff \forall i, \forall t \in I, c'_i(t) = e^{-\lambda_i t} \beta_i(t) \end{aligned}$$

ce qui définit les $c_i(t)$, à une constante additive près.

3.5 Exemples de résolution effective en dimension 2

Exemple. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

1 $X' = AX \quad (H) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

est un syst. différentiel linéaire à coeff constants homogène sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Donc $S_H = \left\{ t \mapsto \exp(tA) C, \quad C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$

Attention: On ne peut pas écrire $C \exp(tA)$
 $C = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \quad \exp(tA) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Il reste donc à calculer $\exp(tA)$.

• Recherche de éléments propres:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A = P D P^{-1}$$

$$\text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• Donc $\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1}$

(en passant par les sous-partielles)

$$= P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1}$$

• Ainsi

$$S_H = \left\{ t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}C}_{\substack{\text{parcourt } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \text{car } P^{-1} \text{ inversible}}}, C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

parcourt $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
car P^{-1} inversible

$$= \left\{ t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} C', C' \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

avec $P \exp(tD) = \left(V_1 \mid V_2 \right) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

$$= \left(e^{3t} V_1 \mid e^t V_2 \right)$$

Bref $S_H = \text{Vect} \left(t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$= \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} + \beta e^t \\ \alpha e^{3t} - \beta e^t \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $X' = AX \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

C'est un syst. diff. homogène à coefficients constants sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc

$$S_H = \left\{ t \mapsto \exp(tA) C, C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

• Réductibilité de A

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X-1)(X+1) + 2 \\ &= X^2 + 1 \quad \text{non scindé sur } \mathbb{R} \\ &= (X-i)(X+i) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$$

$$\begin{aligned} E_i(A) &= \text{Ker}(A - iI_2) \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$\text{car } -2 + (-1+i)(-1-i) = 0$$

$$= \text{Vect}(V_1) \quad \text{ou} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$E_{-i}(A) = \overline{E_i(A)} \quad \text{car } A \in M_2(\mathbb{R})$$

$$AX = -iX \Leftrightarrow \overline{AX} = i\overline{X}$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad A\overline{X}$$

$$= \text{Vect}(V_2) \quad \text{ou} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

- Exprime des solutions à valeurs complexes:

$$S_H = \left\{ t \mapsto P \exp \begin{pmatrix} ti & 0 \\ 0 & -ti \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}C}_{P^{-1}C \text{ parcourt } M_{2,1}(\mathbb{C})}, C \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \right\}$$

$$= \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$

Expression des solutions réelles

$$Z \text{ sol complexe} \Leftrightarrow \forall t \quad Z'(t) = A Z(t)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) \text{ et } \operatorname{Im}(Z) \text{ sont solutions réelles}$$

Donc les sol réelles sont les parties réelles et imaginaires des sol complexes.

$$\operatorname{Re} \left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} \left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Ccl:

$$S_H = \operatorname{Vect} \left(t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \cos t + \beta \sin t \\ (-\alpha + \beta) \cos t - (\alpha + \beta) \sin t \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque:

Solutions nulles:

$$S_H = \{ t \mapsto \exp(tA) C, \quad C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \}$$

Calcul direct de $\exp(tA)$?

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

Calcul de A^n

χ_A est annulateur de A (Cayley-Hamilton)

$$\text{donc } A^2 = -I_2$$

$$\begin{cases} A^{2p} = (-1)^p I_2 \\ A^{2p+1} = (-1)^p A \end{cases}$$

Par les sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{2p+1} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{2p+1} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{2p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^P \frac{t^{2p}}{(2p)!} A^{2p} + \sum_{p=0}^P \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A^{2p+1}$$

$$= \left(\sum_{p=0}^P (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^P (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) A$$

$$\xrightarrow{P \rightarrow +\infty} \cos t \, I_2 + \sin t \, A$$

Then $\exp(tA) = \cos t \, I_2 + \sin t \, A$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c} \quad X' = AX \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

Indic: calculer $A \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 - 150 \\ -90 + 93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc 1 est vp.

$\text{tr}(A) = 2$ donc 1 est vp double de A.

$$\text{Donc } E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En effet A n'est pas diagonalisable,

$$\text{sinon } A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2 !$$

$$\chi_A = (X-1)^2 \quad \text{car 1 vp double}$$

Par le th de Cayley-Hamilton

$$(A - I_2) \text{ est nilpotente d'indice } 2$$

$$\text{On note } N = A - I_2$$

$$\text{On a } A = I_2 + N \quad \text{où } N^2 = 0$$

$$\text{et } I_2 N = N I_2$$

Ans: $\exp(tA) = \exp(tI_2 + tN)$
 $= \exp(tI_2) \exp(tN)$

ca $I_2 N = N I_2$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} (I_2 + tN)$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-30t & -50t \\ 18t & 1+30t \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1-30t & -50t \\ 18t & 1+30t \end{pmatrix}$$

Ans:

$$S_H = \left\{ t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1-30t & -50t \\ 18t & 1+30t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vec} \left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1-30t \\ 18t \end{pmatrix}, t \mapsto e^t \begin{pmatrix} -50t \\ 1+30t \end{pmatrix} \right) \left\{ \right.$$

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

$$X' = A X + B(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On effectue le changement de fonction inconnue

$$X(t) = \exp(tA) C(t)$$

$$X'(t) = A \exp(tA) C(t) + \exp(tA) C'(t)$$

$$X \text{ sol} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(tA) C'(t) = B(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad C'(t) = \exp(-tA) B(t)$$

Recherche des éléments propres de A

$$\text{On remarque que } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc 2 est v.p.

$$\text{Ker}(A) = 0 \quad \text{donc } -2 \text{ est l'autre v.p.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A + 2I_2) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } A = P D P^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \exp(-tA) = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{où } P^{-1} &= \frac{1}{\det P} (\text{com } P)^T \\ &= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X \text{ sol} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} C'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & -3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3te^{-2t} + te^{2t} \\ -3te^{-2t} - 3te^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \int t e^{-2t} - \frac{1}{4} \int t e^{2t} + \alpha \\ \frac{3}{4} \int t e^{-2t} + \frac{3}{4} \int t e^{2t} + \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{on } \int \underbrace{t}_{\downarrow} \overbrace{e^{-2t}}^{\nearrow} = \left[t \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \right] - \int -\frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

$$\int \underbrace{t}_{\downarrow} \overbrace{e^{2t}}^{\nearrow} = \left[t \frac{1}{2} e^{2t} \right] - \int \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t}$$

Bsp: X_{sol}

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall t$$

$$X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} t e^{-2t} - \frac{3}{16} e^{-2t} - \frac{1}{8} t e^{2t} + \frac{1}{16} e^{2t} + \alpha \\ \hline \end{pmatrix}$$

671.10

