

Par le 7^u, rédiger au moins un exercice.

720.11

570.13

720.23 (*)

730.15

580.1

Résolution pratique des équations différentielles linéaires

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

la fonction $y: I \rightarrow K$
 $t \mapsto y(t)$

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Position du problème, structure des solutions

Définition. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H)$$

où a et b sont des applications continues sur I intervalle.

Structure des solutions. Si a et b sont continues et I est un intervalle, alors

- $\mathcal{S}_H$ est une droite vectorielle
- $\mathcal{S}_E$ est une droite affine dirigée par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

Remarque. L'équation peut être proposée sous la forme :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

$$x(x-1)$$

$$\begin{aligned}]-\infty, 0[&= I_1 \\]0, 1[&= I_2 \\]1, +\infty[&= I_3 \end{aligned}$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un **intervalle** sur lequel α **ne s'annule pas** : l'équation doit être **normalisable** sur I .

1.2 Résolution : première méthode

Méthode.

1. On qualifie l'équation différentielle, en précisant la **continuité** des coefficients, le fait qu'on travaille sur un **intervalle** et on écrit l'équation sous forme normalisée.
2. On trouve une solution particulière notée y_{part} de (E) , par exemple en la cherchant sous une forme particulière.
3. On utilise le résultat exprimant $\mathcal{S}_H$: notant A une primitive de a sur I , $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$.
4. On conclut :

$$\mathcal{S}_E = y_{part} + \text{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$$

Remarque. La méthode de variation de la constante, vue en première année, permet de déterminer une solution particulière lorsque l'on a déterminé $\mathcal{S}_H$. Voir aussi la section suivante.

Exemple. Résoudre l'équation :

$$x' + x = t^2$$

- Il s'agit d'une eq. différentielle linéaire d'ordre 1
sur l'intervalle $] -\infty, +\infty[$, avec $t \mapsto t^2$ continue
 $t \mapsto 1$
- Recherche d'un sol particulière

On cherche un sol part sous la forme $x(t) = t^2 + \lambda t + \mu$

$$x \text{ sol} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad (2t + \lambda) + (t^2 + \lambda t + \mu) = t^2$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad (2 + \lambda)t + (\lambda + \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

$x_{\text{part}}: t \mapsto t^2 - 2t + 2$ est un sol. particulière.

- Résolution de l'eq homogène associée: (H) $x' + x = 0$

$$S_H = \text{Vect} (t \mapsto e^{-t})$$

- Conclusion

$$S = (t \mapsto t^2 - 2t + 2) + \text{Vect} (t \mapsto e^{-t})$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2 - 2t + 2 + C e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exemple. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$xy' - y = x^3$$

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation est équivalente à

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2$$

qui est une eq. diff. linéaire du 1^{er} ordre

car $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont continues.

- Recherche d'une sol. particulière sous la forme $y(x) = \lambda x^3$

$$y \text{ sol de (E)} \Leftrightarrow \forall x > 0 \quad 3\lambda x^3 - \lambda x^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

donc $x \mapsto \frac{1}{2} x^3$ est une sol particulière

- Résolution de l'eq homogène (H): $y' - \frac{1}{x} y = 0$

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| + \text{cte}$$

$$\text{donc } S_H = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{\ln|x|} = x \right)$$

- CC:

$$S = \left(x \mapsto \frac{1}{2} x^3 \right) + \text{Vect} \left(x \mapsto x \right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2} x^3 + Cx \end{array} \quad C \in \mathbb{R} \right\}$$

1.3 Résolution : seconde méthode

Méthode.

1. Au brouillon, on calcule A une primitive de a sur I .
2. On effectue le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)e^{-A(x)}$$

en raisonnant bien par équivalence.

Exemple. Résoudre l'équation :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1+x^2$$

- Sur l'intervalle $] -\infty, +\infty[$, l'éq s'écrit

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1$$

qui est une eq diff. linéaire d'ordre 1 car $x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$

est continue

- On calcule: $\int -\frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln(1+x^2)$

- Effectuer le changement de fonction inconnue:

$$\text{On pose } y(x) = z(x)(1+x^2)$$

$$y'(x) = z'(x)(1+x^2) + z(x) 2x$$

y sol de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ls termes en } z(x) \text{ se simplifient}$$

$$(1+x^2)^2 z'(x) = 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \text{Arctan } x + C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = (\text{Arctan } x)(1+x^2) + C(1+x^2)$$

Donc $S = (x \mapsto (1+x^2) \text{Arctan } x) + \text{Vect}(x \mapsto (1+x^2))$

1.4 Résolution sur un intervalle sur lequel l'équation n'est pas normalisable

Méthode. Si l'équation n'est pas normalisable sur l'intervalle I de résolution, on partage I en sous-intervalles sur lesquels l'équation est normalisable. On résout sur chacun de ces intervalles, puis on effectue un **recollement** des solutions.

Exemple. Représenter quelques courbes intégrales et déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :

$$xy' - y = 0 \quad xy' - 2y = 0 \quad xy' - \frac{1}{2}y = 0$$

① $(E_1): xy' - y = 0$

• Notons $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +\infty[$

Sur l'intervalle I_k (E_1) s'écrit $y' - \frac{1}{x}y = 0$

est une eq. diff. linéaire d'ordre 1 homogène

car $x \mapsto -\frac{1}{x}$ continue sur I_k

• $\int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x|$ sur I_k

les solutions de E_1 sur I_k sont:

$$S_k = \left\{ \begin{array}{ll} I_k & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \lambda e^{+\ln|x|} \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} I_k & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \lambda |x| \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

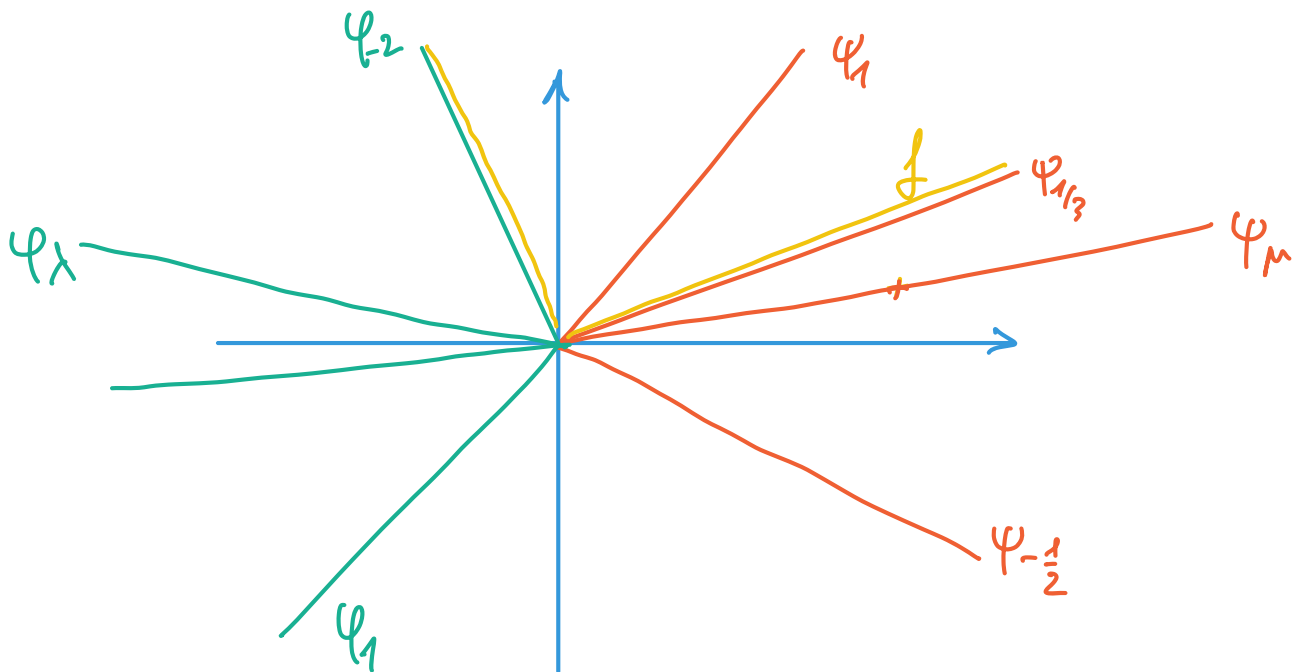
Beaucoup sur $I_2 =]0, +\infty[$
Sur I_1 , en posant $\lambda' = -\lambda$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} I_k & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \lambda' x \end{array} \quad \lambda' \in \mathbb{R} \right\}$$

car x ne change pas de signe sur I_k

$$S_1 = \left\{ \varphi_\lambda :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \lambda x \right.$$

$$S_2 = \left\{ \varphi_\mu :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad , \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ x \mapsto \mu x$$



Existe-t-il une solution de (E_1) définie sur $\mathbb{R}$?

Analyse Soit f une solution de E_1 définie sur $\mathbb{R}$.

Alors $f|_{I_1}$ est sol de E_1 sur I_1

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $f|_{I_1} = \varphi_\lambda$

et $f|_{I_2}$ est sol de E_1 sur I_2

donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $f|_{I_2} = \varphi_\mu$

Et f est C¹ sur $\mathbb{R}$

Chercher la sol de E_1 sur $\mathbb{R}$, c'est raccorder de façon C¹

une sol φ_λ avec une solution φ_μ .

Soit $f_{\lambda, \mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \lambda x & \text{si } x < 0 \\ \mu x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \lambda x \xrightarrow[x \nearrow 0]{} 0 \quad \xleftarrow[x \searrow 0]{} \mu x$$

le raccordement est continu

$$\bullet \quad \varphi_{\lambda}'(x) = \lambda \xrightarrow[x \nearrow 0]{} \lambda$$

$$\mu \xleftarrow[x \searrow 0]{} \mu = \varphi_{\mu}'(x)$$

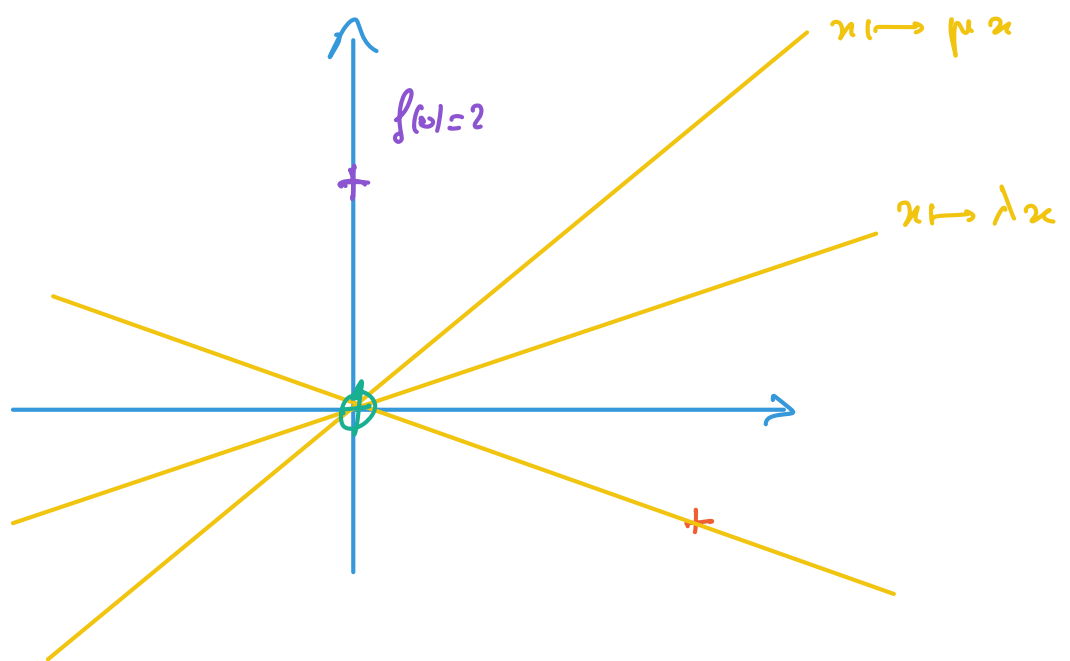
Par linéarité de la dérivée $f_{\lambda, \mu}$ dérivable à droite
et à gauche en 0, donc dérivable en 0 sur
 $\lambda = \mu$.

• CG : les sol de (E1) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$$

$$\text{Rang : } S_{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left(\begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{matrix} \right)$$

droite vectorielle.



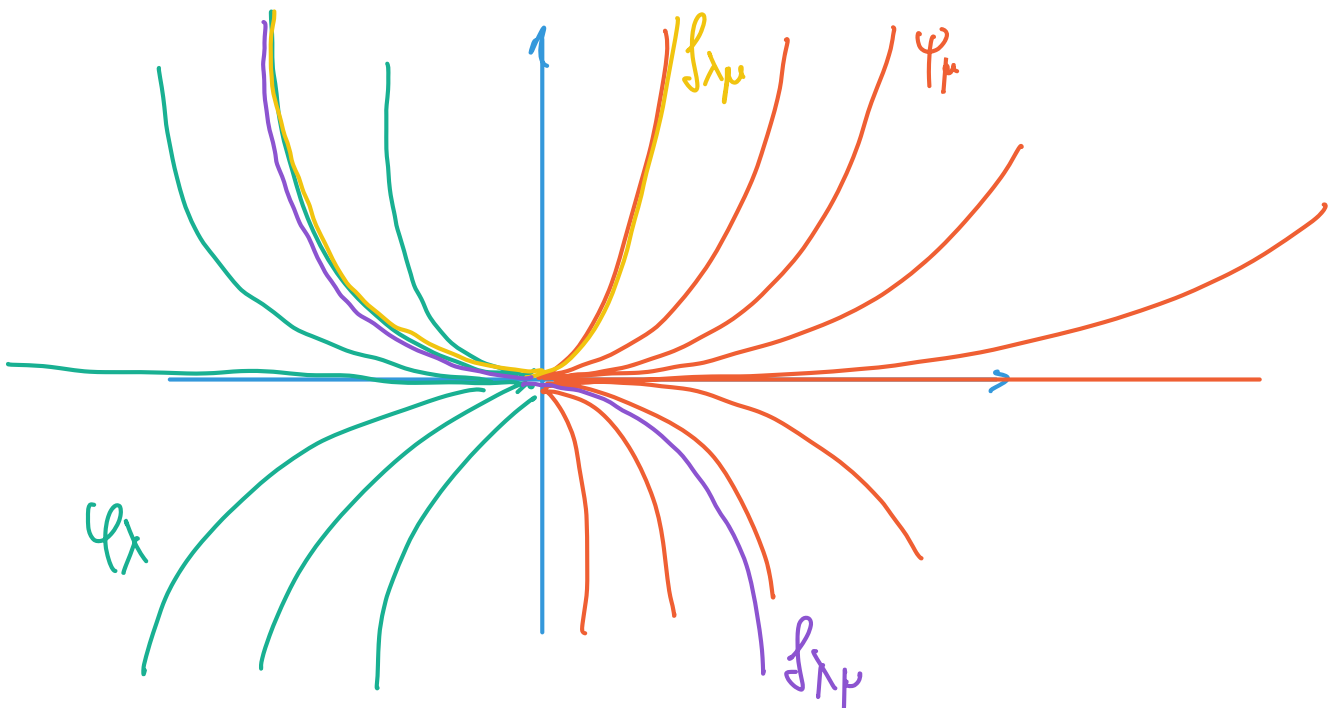
$$(E_2): xy' - 2y = 0$$

$$S_1 = \left\{ \varphi_\lambda:]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \mapsto \lambda x^2$$

$$S_2 = \left\{ \psi_\mu:]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \mapsto \mu x^2$$



$$f_{\lambda\mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x < 0 \\ \mu x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \lambda x^2 \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} 0 \quad \xleftarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \mu x^2$$

donc $f_{\lambda\mu}$ continue en 0

$$\bullet \quad 2\lambda x \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} 0 \quad \xleftarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 2\mu x$$

par suite de la dernière,
 $f_{\lambda\mu}$ est dérivable ($\mathbb{R}^1$) en 0.

$$\underline{\text{CB}}: \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x < 0 \\ \mu x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \text{Vect} \left(f_{10}, f_{01} \right)$$

plan vectoriel, dim 2.

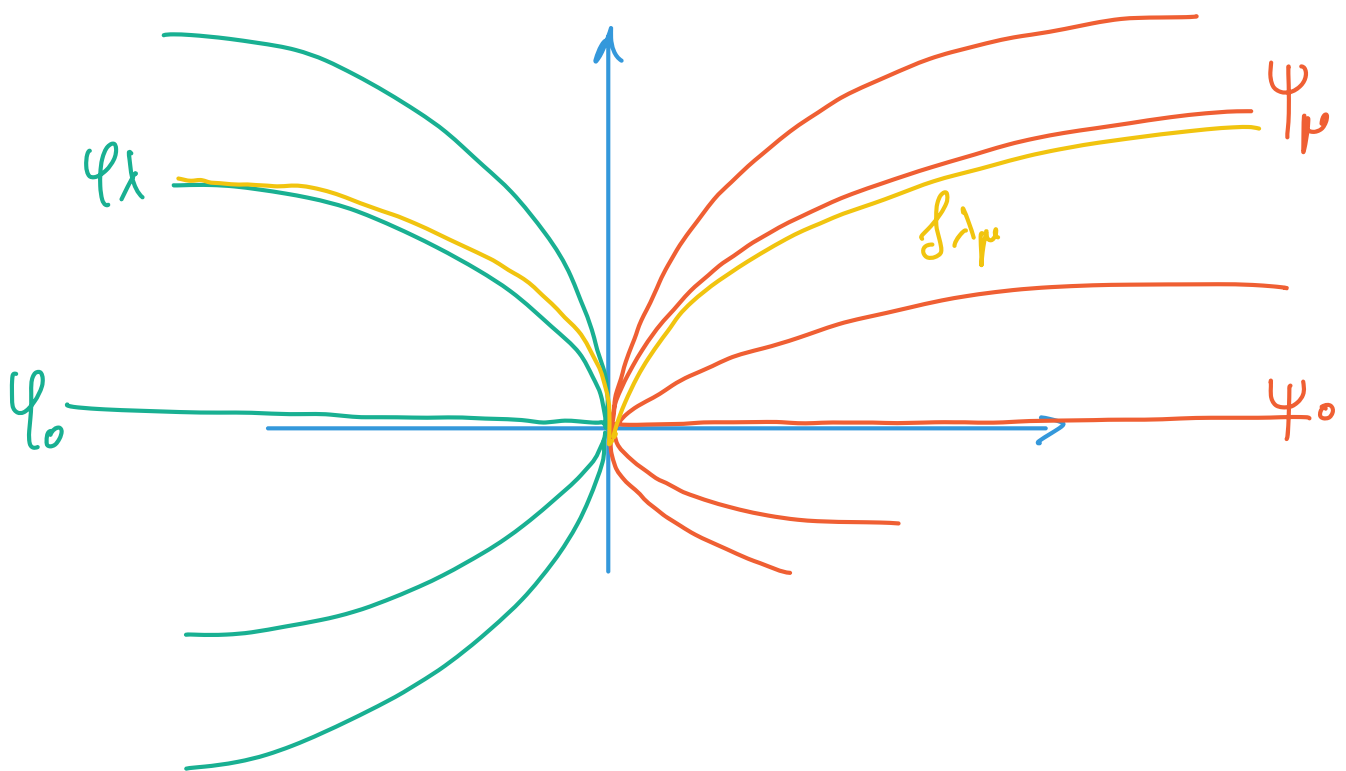
$$(E_3) \quad \int -\frac{1}{2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|x|$$

$$S_1 = \left\{ \varphi_\lambda \mid]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \mapsto \lambda \sqrt{|x|}$$

$$S_2 = \left\{ \varphi_\mu \mid]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \mapsto \mu \sqrt{x}$$



$$f_{\lambda\mu} \in C^1 \quad \underline{\mu} \quad \lambda \neq \mu = 0 \quad [\dots]$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

$$x \mapsto 0$$

$$= \{0\} \quad \text{ev de dim } 0.$$

coeff pas constants.

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Position du problème, structure des solutions

Définition. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation de la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (H)$$

où a , b et c sont des applications continues sur I intervalle.

Remarque. L'équation peut être proposée sous la forme :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un intervalle sur lequel α ne s'annule pas : l'équation doit être normalisable sur I .

Remarque. Contrairement aux équations d'ordre 1 ou aux équations d'ordre 2 à coefficients constants, il n'y a pas de formule de résolution. Il n'est donc pas utile d'avoir une équation normalisée, mais il est important qu'elle soit normalisable : α ne doit pas s'annuler sur I .

"normalisable"

Structure des solutions. Si α , β et γ continues, I est un intervalle et α ne s'annule pas sur I , alors

- $\mathcal{S}_H$ est un plan vectoriel
- $\mathcal{S}_E$ est un plan affine dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

2.2 Étude de l'équation homogène — Wronskien

Étude. On suppose que a , b et c sont des applications continues sur I intervalle, et on note

$$\underline{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0} \quad (H)$$

l'équation différentielle linéaire homogène scalaire étudiée. On a

$$\begin{aligned} (H) &\iff \begin{cases} x' &= x' \\ x'' &= -a(t)x' - b(t)x \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\iff X' = A(t)X \quad \text{ système différentiel noté } H_{\text{mat}} \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix}$.

Un couple (ϕ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H) , i.e. une base de $\mathcal{S}_H$, si et seulement si :

$\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right)$ est un système fondamental de solutions de H_{mat}

preuve.

$$\begin{aligned} u: \mathcal{S}_H &\longrightarrow \mathcal{S}_{H_{\text{mat}}} \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

u est linéaire, $\forall u \neq 0$ u injectif,

donc $\dim \mathcal{S}_H = 2 = \dim \mathcal{S}_{H_{\text{mat}}}$

donc u est un isomorphisme d'ev.

donc (ϕ, ψ) base de $\mathcal{S}_H \iff (u(\phi), u(\psi))$ base
de $\mathcal{S}_{H_{\text{mat}}}$

Définition. Si ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I , on définit leur **wronskien** en posant :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

Théorème.

Soit ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I et W le wronskien de ϕ et ψ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) (ϕ, ψ) est une base de $\mathcal{S}_H$
- (ii) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$
- (iii) $\exists t \in I, W(t) \neq 0$

Preuve:

Calculons!

$$\begin{aligned} W'(t) &= \phi(t) \psi''(t) - \psi(t) \phi''(t) \\ &= \phi(t) (-a(t) \psi'(t) - b(t) \psi(t)) \\ &\quad - \psi(t) (-a(t) \phi'(t) - b(t) \phi(t)) \\ &= -a(t) (\phi(t) \psi'(t) - \psi(t) \phi'(t)) \\ &= -a(t) W(t) \end{aligned}$$

donc W est sol de l'éq différentielle linéaire
scalair d'ordre 1 $y' + a(t)y = 0$

Si $W(t_0) = 0$, W satisfait le pb de

Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Par unicité, comme $t \mapsto 0$ est aussi sol,

$$\forall t \in I, W(t) = 0$$

Bref: (iii) $\Rightarrow$ (ii) et réciproq (ii) $\Rightarrow$ (iii)

- On suppose (i) : (ϕ, ψ) base de $S_{\mathbb{R}}$

Soit $t \in \mathbb{I}$.

$$\text{On définit } u : S_{\mathbb{H}} \longrightarrow M_{21}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2$$

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

u est une application linéaire bijective par le th de Cauchy - linéaire

On a supposé que $B = (\phi, \psi)$ base de $S_{\mathbb{R}}$.

$$\text{Mat}(u, B, \text{canonique}) = \begin{pmatrix} \overset{u(\phi)}{\phi(t)} & \overset{u(\psi)}{\psi(t)} \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (2) \end{pmatrix}$$

u est bijective donc $\det \nearrow \neq 0$

$$\det W(t) \neq 0$$

donc (ii)

- Par contraposée, on suppose $\neg(i)$

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ non tous les deux nuls tq } \lambda \phi + \mu \psi = 0$$

$$\text{ie } \forall t \in \mathbb{I}, \quad \lambda \phi(t) + \mu \psi(t) = 0$$

$$\text{or donc } \lambda \phi'(t) + \mu \psi'(t) = 0$$

$$\text{Alors } W(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad \text{car } \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$$

comb linéaire nulle des
colonnes, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

donc $\neg$ (iii)

Remarque: quand on manipule le Wronskien,
on pense à déterminer une eq. diff
satisfaite par W .

2.3 Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes. On suppose connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H) . Il reste donc à déterminer une solution particulière de (E) . Appliquer la méthode de variation des constantes, c'est rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec la condition additionnelle :

$$\lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Remarque.

- $S_H = \text{Vect}(\phi, \psi) = \{t \mapsto \lambda\phi(t) + \mu\psi(t), \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. Ici, on fait varier les constantes λ et μ .
- On peut se souvenir de la condition additionnelle en disant que n'apparaissent pas de dérivées secondes des « constantes » λ et μ .

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

• Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on reconnaît une eq. diff.

linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, avec

$$t \mapsto \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \text{ continue.}$$

• Recherche de sol de (H) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

$$\text{donc } S_H = \text{Vect} \left(\underbrace{t \mapsto e^{-2t}}_{\phi}, \underbrace{t \mapsto te^{-2t}}_{\psi} \right)$$

(ϕ, ψ) est un syst. fond de solution de (H)

- Recherche d'une sol. particulière par variation des constantes, sous la forme

$$4 \times \quad y(t) = \lambda(t) e^{-2t} + \mu(t) t e^{-2t}$$

$$\text{avec } \lambda'(t) e^{-2t} + \mu'(t) t e^{-2t} = 0$$

$$y'(t) = \left[\lambda'(t) e^{-2t} + \mu'(t) t e^{-2t} \right] + \lambda(t) (-2 e^{-2t})$$

$$4 \times \quad + \mu(t) (e^{-2t} + t (-2) e^{-2t})$$

$$= \lambda(t) (-2 e^{-2t}) + \mu(t) (1 - 2t) e^{-2t}$$

$$y''(t) = \lambda'(t) (-2 e^{-2t}) + \mu'(t) (1 - 2t) e^{-2t} + \lambda(t) (4 e^{-2t})$$

$$1 \times \quad + \mu(t) \left(-2 e^{-2t} + (1 - 2t) (-2) e^{-2t} \right)$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(4t - 4) e^{-2t}}$$

y sol de (E)

$$\Leftrightarrow \lambda'(t) (-2 e^{-2t}) + \mu'(t) (1 - 2t) e^{-2t}$$

$$+ \lambda(t) [0] + \mu(t) [0] = \frac{e^{-2t}}{1 + t^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda'(t) + (1 - 2t)\mu'(t) = \frac{1}{1 + t^2} \\ \lambda'(t) + t\mu'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu'(r) = \frac{1}{1+t^2} \\ \lambda'(r) = -\frac{t}{1+t^2} \end{cases} \quad L_1 + 2L_2$$

On choisit $\mu(r) = \text{Arctan } t + 0$
 $\lambda(r) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + 0$

Donc $y_{\text{part}}: t \mapsto t e^{-2r} \text{Arctan } t - \frac{e^{-2r}}{2} \ln(1+t^2)$
 est une sol particulière de (E)

CCF: $S_E = y_{\text{part}} + \text{Vect}(\phi, \psi)$

2.4 Recherche de solutions développables en séries entières

Méthode. On a vu, lors de l'étude des séries entières, comment rechercher des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle linéaire, par exemple d'ordre 1 ou 2.

On note $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, on suppose le rayon de convergence > 0 (c'est l'analyse). Dire que x est solution de l'équation différentielle se traduit (si tout va bien) en une condition sur les a_n (ici, on raisonne par équivalence sous l'hypothèse $R > 0$). On vérifie que les séries obtenues ont bien un rayon de convergence > 0 (c'est la synthèse).

Exemple. Utiliser une série entière pour déterminer l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exemple. On considère l'équation différentielle :

$$t^2 x'' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0 \quad (E)$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle qui sont somme d'une série entière autour de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions qui sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.

