

Équations différentielles linéaires

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Généralités

1.1 Équation différentielle linéaire, système différentiel linéaire

Définition.

- On appelle **équation différentielle linéaire** une équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad (E)$$

où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ sont des applications continues.

I intervalle de $\mathbb{R}$.

- Résoudre (E) , c'est déterminer les fonctions $x : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I, x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à (E)** l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x \quad (H)$$

Remarque. $a(t)$ est une application linéaire, $a(t) \cdot x(t)$ désigne l'image par cette application linéaire du vecteur $x(t)$.
On pourrait la noter $a(t)(x(t))$.

$$(E) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

$$\forall t \quad a(t) \in \mathcal{L}(E)$$

$$a(t) : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto a(t)(x) \text{ notée } a(t) \cdot x$$

x est ici la fonction vectorielle inconnue

$$x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto x(t)$$

$$b : I \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto b(t)$$

Exemple: Cas où $E = \mathbb{R}$

Les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont les applications
 $a: t \mapsto a(t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto p(t)x$ où $p(t) \in \mathbb{R}$

une E.D.L. sur $E = \mathbb{R}$ prend la forme:

$$x' = p(t)x + b(t)$$

Remarque Seules les EDL sont au programme.

Inconvénient: on n'a pas de formule de résolution des E.D., même linéaires.

en général, sauf si $E = \mathbb{R}$, ou alors si a est constante.

Exemple. Rechercher les $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = t^2 M(t)$$

c'est vouloir résoudre une équation différentielle linéaire homogène, où $a : t \mapsto t^2 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\forall t \quad x'(t) = \overset{E^{q(E)}}{a(t)} \cdot \overset{E^E}{x(t)} + \overset{E^E}{b(t)}$$

Traduction matricielle.

Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Notons $A(t) = \text{Mat}(a(t), \mathcal{B})$, $B(t) = \text{Mat}(b(t), \mathcal{B})$ et $X(t) = \text{Mat}(x(t), \mathcal{B})$.

- L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme d'un **système différentiel linéaire** :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (S)$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des applications continues.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à (S)** :

$$X' = A(t)X$$

Exemple. Rechercher les fonctions $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + (1+t)y(t) + t^2 \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + \sin(t)y(t) + 1+t \end{cases}$$

c'est vouloir résoudre le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

$$\text{où } A : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1+t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \text{ et } B : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Exemple. Le système de Lotka-Volterra qui modélise l'évolution d'une population de proies et de prédateur s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

C'est un système différentiel, non linéaire. Son étude n'entre pas dans le cadre du programme.

1.2 Principe de superposition

Proposition. Si x_1, x_2 sont solutions de deux équations différentielles linéaires ayant la même équation homogène associée : $x' = a(t) \cdot x + b_1(t)$ et $x' = a(t) \cdot x + b_2(t)$ respectivement, alors $x_1 + x_2$ est solution de l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x + (b_1(t) + b_2(t))$$

$$(E_1) \quad x' = a(t) x + b_1(t)$$

$$(E_2) \quad x' = a(t) x + b_2(t)$$

2 E.D.L.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } x_1 \text{ est une sol de } (E_1) \\ \quad x_2 \text{ ————— } (E_2) \\ \text{alors } x_1 + x_2 \text{ est sol de} \\ \quad x' = a(t) \cdot x + (b_1(t) + b_2(t)) \end{array} \right.$$

Preuve $\forall t \in I$

$$x_1'(t) = a(t) \cdot x_1(t) + b_1(t)$$

$$x_2'(t) = a(t) \cdot x_2(t) + b_2(t)$$

En sommant, par linéarité de la dérivation et

de $a(t) \in \mathcal{L}(E)$

$$(x_1 + x_2)'(t) = a(t) \cdot (x_1(t) + x_2(t)) + b_1(t) + b_2(t)$$

1.3 Problème de Cauchy

Définition. On appelle **problème de Cauchy** l'association d'une équation différentielle linéaire et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Théorème.

La recherche des fonctions $x : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalente à la recherche des fonctions $x : I \rightarrow E$ continues telles que :

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u) \cdot x(u) + b(u) \, du$$

Remarque. On dit qu'on a mis sous forme intégrale le problème de Cauchy.

Traduction matricielle.

Un **problème de Cauchy** pour un système différentiel linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

$$y'' + \frac{3}{2}y' - \frac{5}{2}y = \frac{\cos(t)}{2}$$

E.D.L d'ordre 2 à coeff constants

$$y'' = ay' + by + c(t)$$

1.4 Représentation d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n

Définition.

- On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \quad (E)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

- Résoudre (E) , c'est déterminer les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que :

$$\forall t \in I, f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à (E)** l'équation :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y \quad (E_0)$$

Remarque. Il importe que l'équation différentielle soit « normalisée », c'est-à-dire que le coefficient devant $y^{(n)}$ soit 1.

$$\cancel{\cos(t)} y'' + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} y' + \frac{e^t}{\cos(t)} y = \frac{t^2}{\cos(t)}$$

n'est pas à résoudre en $y'' \Rightarrow$

n'est pas à normaliser $\Rightarrow$

ie le coeff devant y'' n'est pas 1.

sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervalle, c'est une EDL scalaire
d'ordre 2 (normalisable)

Théorème.

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n peut être représentée par le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

en posant dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Remarque. On reconnaît la transposée d'une matrice compagnon.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

y sol de (E)

$$\Leftrightarrow \forall t \in I$$

$$\begin{cases} y'(t) = y'(t) \\ y'(t) = y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) y(t) + b(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \quad X'(t) = A(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & & & & | \\ 0 & & & & 0 \\ \hline a_0(t) & \dots & 0 & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Manipulation à savoir effectuer

Définition. On appelle problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n l'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Remarque. Il existe d'autres problèmes, dont l'étude n'est pas au programme, comme celui des conditions aux limites.

2 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire.

Si :

- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

existence + unicité

Remarque. Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Rappel:

$$a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$t \mapsto a(t)$$

Traduction matricielle.

Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Corollaire.

Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Exemple. Soit $\phi : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation homogène :

$I \neq \emptyset$

$$X' = A(t)X$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur I . Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in I, \phi(t) = 0 \iff \forall t \in I, \phi(t) = 0$$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Preuve si ϕ s'annule, alors ϕ est nulle.

On suppose $\exists t_0 \in I$ $\phi(t_0) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc ϕ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Par le th de Cauchy-Lipschitz, avec A continue sur I intervalle, on sait qu'il existe une unique solution à ce problème.

Or ϕ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sont solutions,

donc $\phi = 0$

Exercice:

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $AB=BA$

On veut montrer que $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$

On note $\phi(t) = \exp(t(A+B)) \in M_n(\mathbb{R})$ pour $t \in \mathbb{R}$

$$\psi(t) = \exp(tA) \exp(tB) \in M_n(\mathbb{R})$$

On note $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ base canonique de $M_n(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots$$

• On note $\phi_k(t) = \exp(t(A+B)) E_k$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_k'(t) = (A+B) \exp(t(A+B)) E_k$$

donc ϕ_k est sol de

$$X' = (A+B) X$$

$$\text{car } \phi_k(0) = \exp(0_{M_n(\mathbb{R})}) E_k$$

$$= I_n \cdot E_k$$

$$= E_k$$

Bref: ϕ_k est sol du pb de Cauchy:

$$\begin{cases} X' = (A+B) X \\ X(0) = E_k \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

• On note $\psi_E(t) = \psi(t). E_E$

$$= \exp(tA) \exp(tB) E_E$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\psi_E'(t) = \left(A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) \underbrace{B \exp(tB)}_{?} \right) E_E$$

car : $\forall N \quad \left(\sum_{i=0}^N \frac{(tA)^i}{i} \right) B = B \left(\sum_{i=0}^N \frac{(tA)^i}{i} \right)$

car $AB = BA$ donc B commute

avec $A^i \forall i$ donc avec les polynômes de A

Par continuité du produit matriciel, bilinéaire

sur un espace de dim finie, à la limite

$$\exp(tA) B = B \exp(tA)$$

et donc $\psi_E'(t) = (A+B) (\exp(tA) \exp(tB)) E_E$

et $\psi_E(0) = \exp(0_{m \times m}) \exp(0_{m \times m}) E_E$

$$= I_m E_E$$

$$= E_E$$

Bref, ψ_E est sol sur $\mathbb{R}$ du pb de Cauchy:

$$\begin{cases} X' = (A+B) X \\ X(0) = E_E \end{cases}$$

Par le th de Cauchy-Lipschitz (sur l'interval $\mathbb{R}$,
avec des coefficients constants donc continus), il y
a unicité donc $\forall k \quad \phi_k = \psi_k$

en particulier:

$$\phi_k(1) = \psi_k(1)$$

$$\text{i.e. } \exp(A+B) E_k = \exp(A) \exp(B) E_k$$

Avec $B = (E_1 \dots E_n)$ base de $M_n(\mathbb{R})$

$$\text{donc } \exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$$

la colonne k de $\exp(A+B)$

la colonne k de
 $\exp(A) \exp(B)$

2.2 Structure de l'ensemble des solutions — équations homogènes

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- a est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire homogène : $x' = a(t) \cdot x$ (H)

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$
- pour $t_0 \in I$, $\mathcal{S}_H \rightarrow E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
 $x \mapsto x(t_0)$
- $\dim \mathcal{S}_H = \dim E$

Preuve: On rappelle $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

$$t \longmapsto a(t)$$

- π1: * $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{C}^1(I, E)$ par définition (*)

* $t \longmapsto 0_E$ est une solution de (H)

* Si x, y sont solutions de (H), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad (\lambda x + \mu y)'(t) &= \lambda x'(t) + \mu y'(t) \\ &= \lambda a(t) \cdot (x(t)) + \mu a(t) \cdot (y(t)) \\ &= a(t) \cdot (\lambda x(t) + \mu y(t)) \\ &\quad \text{par linéarité de } a(t) \end{aligned}$$

π2 noyau d'une application linéaire [...]

(*) Remarque

Parfois, on dit que x est solution de (H) lorsque :

x est dérivable sur I et $\forall t \in I \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t)$

Si x est solution, alors x est dérivable

$$\text{et } \forall t \quad x'(t) = a(t) \cdot (x(t))$$

or $t \mapsto x(t)$ est continue (car dérivable)

$t \mapsto a(t)$ est continue (à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$)

donc par composition $t \mapsto x'(t)$ est continue.

• Soit $t_0 \in I$.

On note $\varphi: S_H \longrightarrow E$

$$x \longmapsto x(t_0)$$

φ est linéaire et bijective par le th de Cauchy-linéaire

• $\dim S_H = \dim E$.

Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène : $X' = A(t)X$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \rightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ y & \mapsto & (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

Remarque: pas de formule de résolvante.

Mais ce th donne la dim de $\mathcal{S}_H$ et

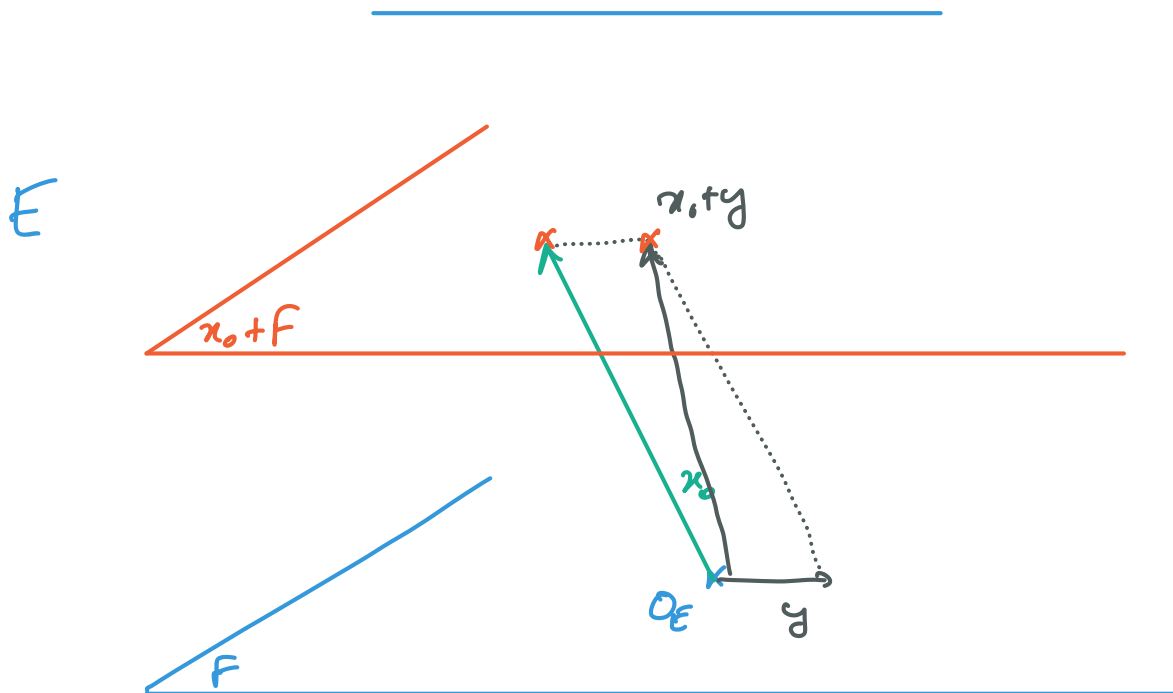
donc peut de savoir si on a trouvé toutes les solutions.

Définition. Une base de $\mathcal{S}_H$ s'appelle un **système fondamental de solutions** de l'équation homogène.

Exemple. Déterminer un système fondamental de solutions du système :

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

On pourra commencer par chercher un système dont sont solutions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$.



$$x_0 + F = \{x_0 + y, y \in F\}$$

translaté de l'es F .

espace affine.

$x_0 + F$ n'est pas un es (ne contient pas 0
pas stable par CL)

2.3 Structure de l'ensemble des solutions — équations complète

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I
- $\mathcal{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$

alors :

- $\mathcal{S}_E$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension $\dim E$.

Preuve: par hyp.:

$$\forall t \in I \quad x'_{\text{part}}(t) = a(t) (x_{\text{part}}(t)) + b(t) \quad (*)$$

$$x \in \mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad x'(t) = a(t) (x(t)) + b(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad x'(t) - x'_{\text{part}}(t)$$

$$= a(t) (x(t)) - a(t) (x_{\text{part}}(t))$$

en retranchant l'égalité (*)

$$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad (x - x_{\text{part}})'(t) = a(t) (x - x_{\text{part}})(t)$$

par linéarité de la dérivée et $a(t)$

$$\Leftrightarrow x - x_{\text{part}} \in \mathcal{S}_H$$

Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire : $X' = A(t)X + B(t)$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension n .

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension n .

