

DS de physique

Soutenances de TIPE

Envoi du diaporama au format PDF minimum 24h à l'avance

Guillaume Haberer - Vendredi 27 février - salle B315

14h-14h25	Bladehane	16h-16h25	Bessaiah
14h30-14h55	Chara-Petit	16h30-16h55	Klein
15h-15h25	Anjuère	17h-17h25	Goffinet
15h30-15h55	Noury	17h30-17h55	Bontron

Guillaume Haberer - Vendredi 6 mars - salle B315

14h-14h25	Jiva Lila
14h30-14h55	Soucaze-Soudat
15h-15h25	Berthet
15h30-15h55	Van de Steene

Envoi du diaporama au format PDF minimum 24h à l'avance

Charles Grenier - Vendredi 27 février - salle B310

14h-14h25	Trabet	16h-16h25	Anestis
14h30-14h55	Berthail	16h30-16h55	Pioteyry
15h-15h25	Zakkad	17h-17h25	Sanchez
15h30-15h55	Barbier	17h30-17h55	Cherkhaoui

Charles Grenier - Vendredi 6 mars - salle B310

14h-14h25	Cherkhaoui Jacquet	16h-16h25	Jacquet
14h30-14h55	Ballandras		
15h-15h25	Rouillard		
15h30-15h55	P. Bernard		

Envoi du diaporama au format PDF minimum 24h à l'avance

Quentin Fortier - Vendredi 27 février - salle B309

13h55-14h15	A. Bernard
14h15-14h35	Bogomolov
14h35-14h55	Dinsdale
14h55-15h15	Duret
15h15-15h35	Fauchere-Collin
15h35-15h55	Guillaume

Quentin Fortier - Vendredi 6 mars - salle B309

13h55-14h15	Hamed
14h15-14h35	Horard
14h35-14h55	Lagadec
14h55-15h15	Menai
15h15-15h35	Monnier
15h35-15h55	Penet de Monterno

Quentin Fortier - Vendredi 13 mars - salle B309

13h55-14h15	Peyrin
14h15-14h35	Picq
14h35-14h55	Samaranch
14h55-15h15	Spraggins
15h15-15h35	Tessier
15h35-15h55	Yamani

Calculer le laplacien en coordonnées polaires

$$M = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$f(M) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta)$$

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$$

à exprimer à l'aide des dérivées partielles de g .

ou dérivée par rapport à r , à θ .

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(M) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(M)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) \end{aligned}$$

Schwarz $\rightarrow$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) \\ &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r)$$

$$+ -r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$\cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r) \\ + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r)$$

$$= -r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$$

$$+ r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$= -r \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$+ r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$- r^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$= -r \frac{\partial g}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

et donc $\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right)$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

1.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur U et $a \in U$.

Si :

- f est différentiable sur U
- a est intérieur à U
- f admet un extremum local en a

alors :

- a est un point critique de f .

Th des bornes atténuées Si f est continue sur K compact, alors f admet un min et un max sur K .

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Remarque. Sous forme développée avec les dérivées partielles, l'expression s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2)$$

On reconnaît la différentielle de f en a dans le terme linéaire. Le terme suivant s'appelle « quadratique ».

3.3 Conditions du second ordre

Théorème. *cond nécessaire*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- f admet un minimum local en a

alors :

- $\nabla f(a) = 0$
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Remarque. De façon équivalente, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≥ 0 .

Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≤ 0 .

Soit λ vp de $H_f(a)$, v vecteur propre associé

$$t \rightarrow 0 \quad f(a+tv) - f(a) = \underset{\nabla f(a)=0}{0} + \frac{t^2}{2} v^\top H_f(a) v + o(t^2)$$

Théorème. Cond suffisante

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- a est un point critique de f
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

alors :

- f admet un minimum local strict en a

Remarque. De façon équivalente, on peut supposer que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont > 0 .

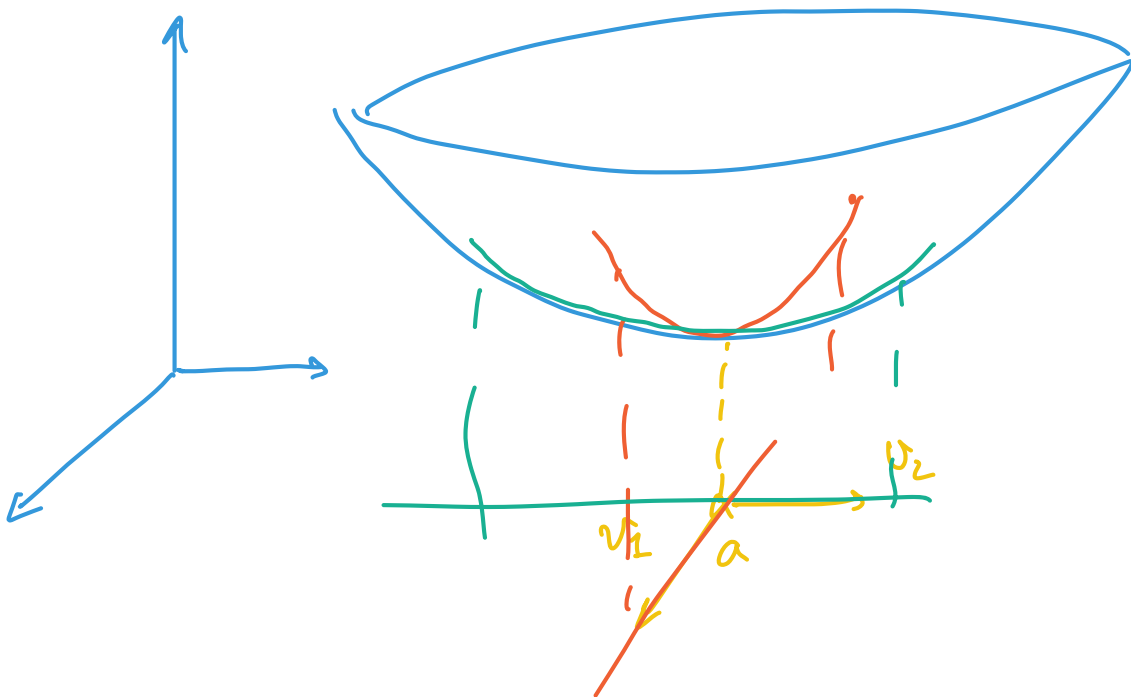
Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont < 0 .

Preuve:

$$H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}$$

$\mathbb{R}^n$ se décompose en $\bigoplus \text{Vect}(v_k)$

v_k vecteurs propres associés à $\lambda_k > 0$



Soit $v \in \mathbb{R}^n$

$(v_1 \dots v_n)$ base orthonormée de

vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$

$$\text{donc } v = \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle v | v_k \rangle}_{\alpha_k} v_k$$

On regarde dans la direction de v .

Au voisinage de $h \rightarrow 0$

$$f(a+tv) - f(a) = \overset{=0}{\langle \nabla f(a) | tv \rangle} + \frac{1}{2} t^2 v^T H_f(a) v + o(t^2)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \mid H_f(a) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \right) \right\rangle + o(t^2)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \mid \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j v_j \right\rangle + o(t^2)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \underbrace{\sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \lambda_k}_{>0} + o(t^2)$$

> 0 car $\lambda_1 > 0 \dots \lambda_m > 0$

et $(\alpha_1 \dots \alpha_m) \neq (0 \dots 0)$

$$\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} t^2 \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \lambda_k$$

> 0 au voi de $h \rightarrow 0$

Donc f admet un minimum en a .

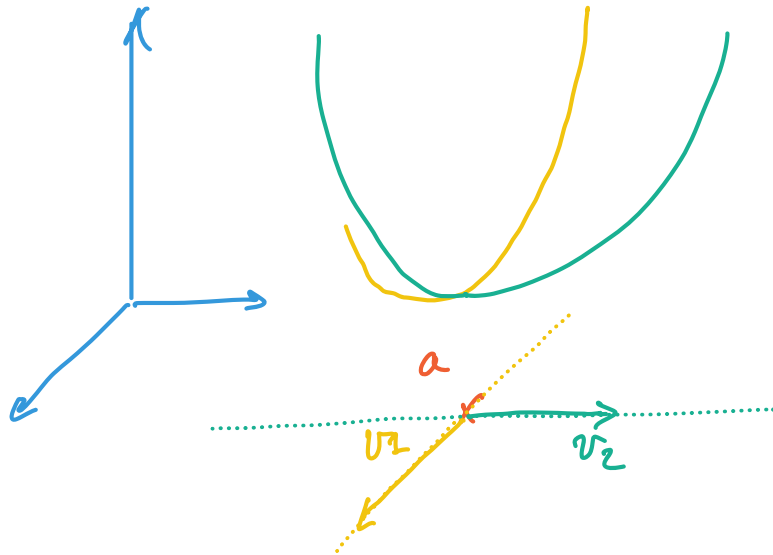
(Pour comparer $f(b)$ et $f(a)$ au voisinage de a

on applique ce qui précède avec $v = \frac{b-a}{\|b-a\|}$)

Remarque:

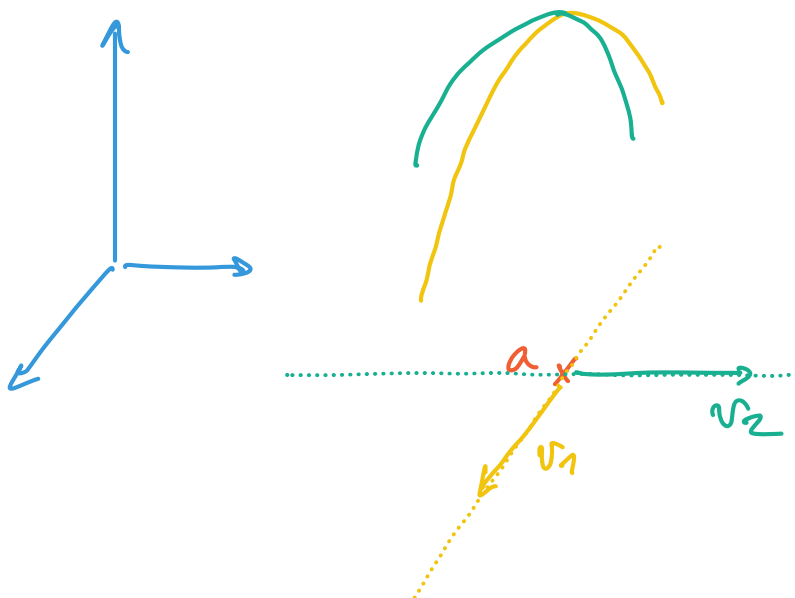
• $\nabla f(a) = 0, H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

v_1, v_2 vecteur props
 λ_1, λ_2 val props > 0



• $\nabla f(a) = 0 \quad H_f(a) \in \cancel{S_n^{++}(\mathbb{R})}$

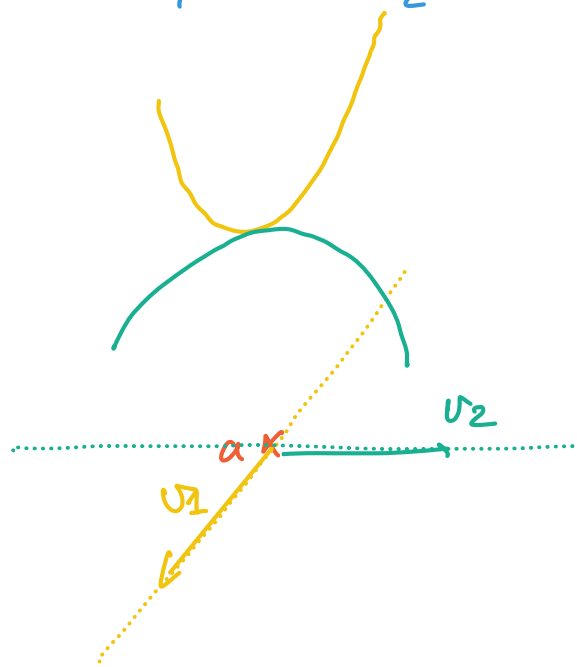
$S_p(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$ $-H_f(a) \in S_n^{++}$



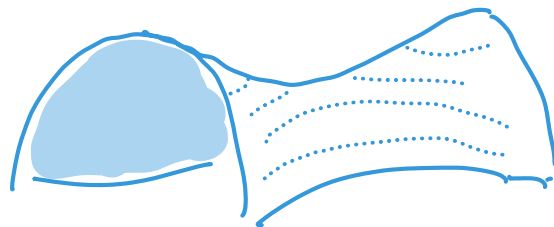
- $\nabla f(a) = 0$

$\lambda_1 > 0$

$\lambda_2 < 0$



en a , pas d'extrémum. On parle de point col.

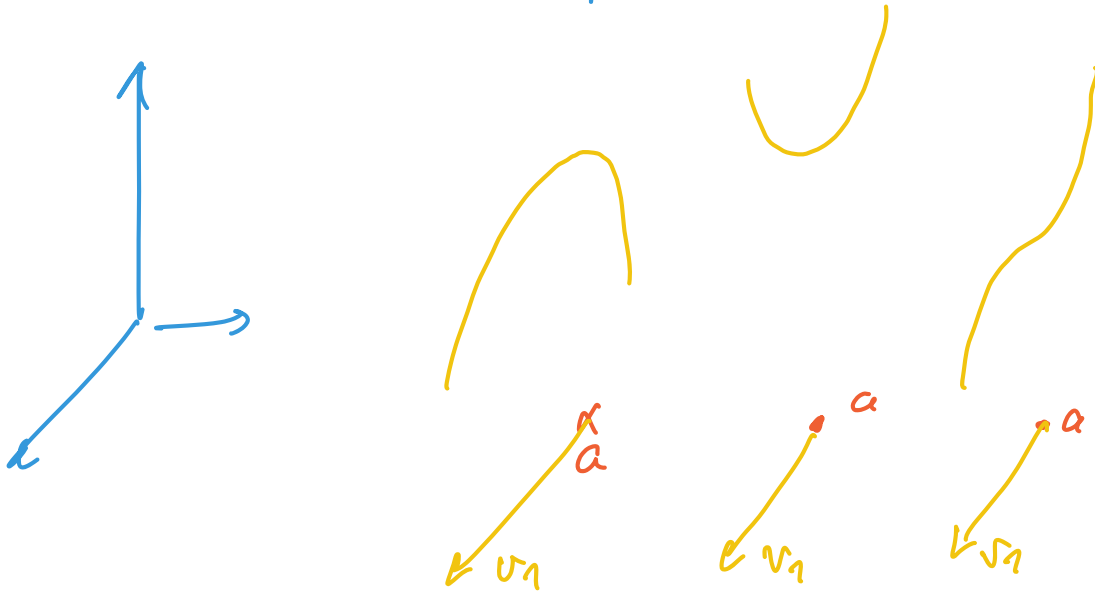


- $\nabla f(a)$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$

Dans la direction de v_1 :

$$\begin{aligned}
 f(a + tv_1) - f(a) &= \langle \overset{=0}{\nabla f(a)} | tv_1 \rangle \\
 &\quad + \frac{t^2}{2} v_1^T \underbrace{H_f(a)}_{=0} v_1 + o(t^2) \\
 &= o(t^2)
 \end{aligned}$$

pas d'info sur le signe.



Cas des fct de 2 variables:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & s \\ s & \mu \end{pmatrix}$$

$H_f(a) \in S_2(\mathbb{R})$ donc orthodagonalisable

$$= P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^T$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$0 \text{ n'est pas } \forall \Leftrightarrow \lambda \mu \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det H_f(a) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \mu - s^2 \neq 0$$

les λ_p sont de un signe $\Leftrightarrow \lambda_p > 0$

pourquoi un en a que 2

$$\Leftrightarrow \det H_f(a) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - s^2 > 0$$

Dans ce cas, $\det \mu > 0 \Leftrightarrow 1 + \mu > 0$

$$\Leftrightarrow 1 + h H_f(a) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + h > 0$$

Dans ce cas, $\det \mu < 0 \Leftrightarrow 1 + h H_f(a) < 0$

Corollaire. Dans le cas où $n = 2$, on note :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t > 0$, alors $H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
donc f présente un minimum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t < 0$, alors $-H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
donc f présente un maximum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 < 0$, f présente un point col en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

730.10

- $f \in \mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ouvert

donc si f présente un extremum en (x, y) ,

alors (x, y) point critique de f

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} 3x + 6 = 0 & 2L_1 - L_2 \\ 3y - 6 = 0 & 2L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Donc $\underbrace{(-2, 2)}_a$ unique point critique

- $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(signe des up ?)

$$\det H_f(a) = 3 > 0$$

$$\text{tr } H_f(a) = 4 > 0$$

$$\text{Donc } H_f(a) \in S_2^{++}(\mathbb{R})$$

donc f présente en $(-2, 2)$ un minimum local

730.11

- f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ouvert

donc, si a est extrême de f , a est point critique de f .

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x + 2y - 4$$

$$a \text{ point critique} \Leftrightarrow a = (1, 0)$$

- $$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(1, 0) = 4 - 16 < 0$$

donc f présente en $(1, 0)$ un point col

(pas d'extrémum).

Autour de $f(1,0)$ $(h,k) \rightarrow (0,0)$

$$f(1+h, 0+k)$$

$$= (1+h)^2 + 4(1+h)k + k^2 - 2(1+h) - 4k$$

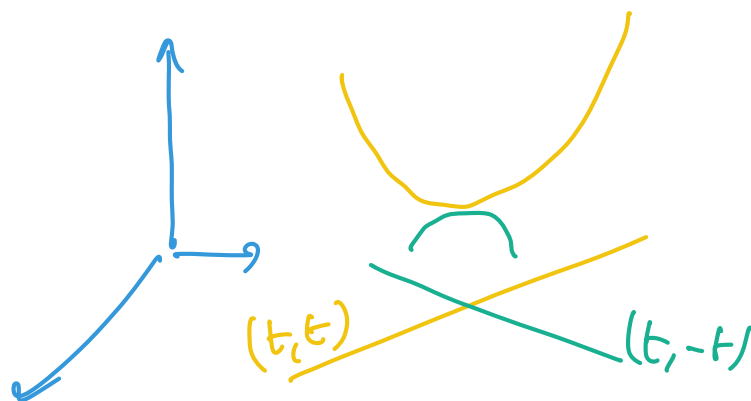
$$= \underbrace{-1}_{f(1,0)} + \underbrace{2h + 4k - 2h - 4k}_{=0} + h^2 + 4hk + k^2$$

$$= f(1,0) + \underbrace{\langle \nabla f(1,0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(1,0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|^2)$$

Signe de $\underbrace{h^2 + 4hk + k^2}_{\Delta(h,k)}$?

$$\Delta(t,t) = 6t^2 > 0 \quad \text{au vir de } t \rightarrow 0$$

$$\Delta(t,-t) = -2t^2 < 0 \quad \text{au vir de } t \rightarrow 0$$



idée 2: chercher les éteins propres de $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

730.4

