

721.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

(a) On suppose f homogène de degré α . Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

(b) Montrer la réciproque.

$$\begin{array}{lll} \cancel{\left(\cos(3x) \right)'} & \cos'(3x) & \text{dérivée de } \cos(3x) \\ \frac{d}{dx}(\cos(3x)) & \frac{d \cos}{dx}(3x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a) } \forall t > 0 \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y) \quad x, y \text{ fixes.} \\ \downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f(tx, ty)) &= \frac{\partial(tx)}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + \frac{\partial(ty)}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial t} (t^\alpha \underbrace{f(x, y)}_{\text{constante}}) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$$

$$\text{En } t=1 \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Réciproque:

$$\text{posons } \varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y) \quad \forall t > 0 \\ \forall t > 0$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - \alpha t^{\alpha-1} f(x, y) \\ &= \frac{1}{t} \left(tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - \alpha t^\alpha f(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\alpha f(tx, ty) - \alpha t^\alpha f(x, y) \right) \\ &= \frac{\alpha}{t} \left(f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y) \right) \\ &= \frac{\alpha}{t} \varphi(t) \end{aligned}$$

Donc φ est sol sur $]0, +\infty[$ de l'éq différentielle

$$\begin{aligned} z' - \frac{\alpha}{t} z &= 0 \\ \text{donc } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall t > 0 \quad \varphi(t) &= \lambda e^{-\int \frac{-\alpha}{t} dt} \\ &= \lambda e^{\alpha \ln t} \\ &= \lambda t^\alpha \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varphi(1) = 0 \text{ donc } \lambda = 0$$

$$\underline{\text{CQ}}: \quad \forall t > 0 \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

721.2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique de E .

(a) Montrer que $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de E .

(b) Montrer que l'application :

$$F : E \setminus \{0_E\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$:

$$dF(a) = 0 \iff a \text{ est vecteur propre de } u$$

(a) 111 au voisinage de $h \rightarrow 0$ $h \in E$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{df(x) \cdot h}_{\text{linéaire}} + o(h)$$

$$= \langle u(x+h), x+h \rangle \quad \text{linéaire en } h \quad 2\langle u(x), h \rangle$$

$$= \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle$$

$$+ \underbrace{\langle u(h), h \rangle}_{\text{par continuité de } u}$$

$$|\langle u(h), h \rangle| \leq \underbrace{\|u(h)\|}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0 \\ 0}} \|h\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ \text{par continuité de } u$$

$$= f(x) + 2\langle u(x), h \rangle + o(h)$$

$$\text{Donc } df(x) : h \mapsto 2\langle u(x), h \rangle$$

112

se linéaire donc $du(x) = u$

$$du(x) \cdot h = u(h)$$

Id_E linéaire donc $d\text{Id}_E(x) = \text{Id}_E$

$$\cancel{d\text{Id}_E = \text{Id}_E}$$

$$\begin{aligned} df(x) \cdot h &= \langle du(x) \cdot h, x \rangle \\ &\quad + \langle u(x), d\text{Id}_E(x) \cdot h \rangle \\ &= \langle u(h), x \rangle \quad \text{car } u \text{ linéaire} \\ &\quad + \langle u(x), h \rangle \\ &= 2 \langle u(x), h \rangle \quad \text{car } u \text{ symétrique.} \end{aligned}$$

Rappel: $df: E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$

$$df(x): E \rightarrow F$$

Rappel: Pour $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$d\varphi(x) \cdot h$$

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \underbrace{\varphi'(x) \cdot h}_{\text{}} + o(h)$$

Pour φ d'une variable $d\varphi(x): h \mapsto \varphi'(x)h$

a') $g: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable? différentiable?
 $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^2}$

g composée : inv $\circ \underbrace{\|\cdot\|^2}_{\text{noté } m}$

$$d n(n).h = 2 \langle x, h \rangle \quad \text{per (a)}$$

$$d \operatorname{inv}(t).h = -\frac{1}{t^2} \cdot h$$

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$d(\operatorname{inv} \circ n)(x) = d \operatorname{inv}(n(n)) \circ d n(x)$$

$$d(\operatorname{inv} \circ n)(x).h = -\frac{1}{n(n)^2} (2 \langle n, h \rangle)$$

$$b) \quad F(x) = f(n) \times g(x)$$

per linearità

$$dF(x).h = f(n).dg(x).h + df(x).h \times g(n)$$

$$= \langle u(n), x \rangle \left(-\frac{1}{\|n\|^4} 2 \langle n, h \rangle \right)$$

$$+ 2 \langle u(n), h \rangle \cdot \frac{1}{\|x\|^2}$$

$$= \frac{2}{\|x\|^4} \left(\|x\|^2 \langle u(n), h \rangle - \langle u(n), x \rangle \langle x, h \rangle \right)$$

$$= \frac{2}{\|x\|^4} \langle \underbrace{\|x\|^2 u(n) - \langle u(n), x \rangle x}_{\text{red line}}, h \rangle$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $df(u) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ $x \neq 0$

$$\text{à } \forall h \in E, df(u) \cdot h = 0$$

$$\text{donc } \|x\|^2 u(u) - \langle u(u), x \rangle x \in E^\perp = \{0_E\}$$

$$\text{donc } u(u) = \frac{\langle u(u), x \rangle}{\|x\|^2} x$$

vector propre

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $u(u) = \lambda x$ $x \neq 0$

$$\|x\|^2 u(u) - \langle u(u), x \rangle x$$

$$= \lambda \|x\|^2 x - \lambda \|x\|^2 x$$

$$= 0$$

$$\text{donc } dF(x) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}.$$

E es un de dim finie

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

f différentiable en a

$$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h)_{h \rightarrow 0}$$

f admet des dérivées partielles en a

Fixes $B = (e_1 \dots e_n)$ base de E

$\Leftrightarrow f$ admet des dérivées dans les directions e_1 en a .
 $\vdots$
 e_n

$t \mapsto f(a + t e_k)$ dérivée en 0.

On note $\partial_k f(a)$ ce nombre dérivée partiel
 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Pour $f \in \mathcal{C}^1$

$$df(a) \cdot h = \sum_{k=1}^n \partial_k f(a) \times h_k$$

grad $\longrightarrow$ nécessite que E soit euclidien.

Optimisation

2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

2.1 Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- Lorsqu'elles existent, les $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les **dérivées partielles premières** de f .
- Lorsqu'elles existent, on définit les **dérivées partielles secondes** comme dérivées partielles des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} (f)(a)$$

que l'on note encore $\partial_j \partial_i f(a)$ ou encore $\partial_{ij} f(a)$.

- On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^2$** sur U lorsque toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U .
- On définit par récurrence les **dérivées partielles d'ordre k** , et la **classe $\mathcal{C}^k$** .
- f **est de classe $\mathcal{C}^\infty$** lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k .

2.2 Théorème de Schwarz

Théorème de Schwarz.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U , alors pour tout i, j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque. Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, les dérivées partielles k -ièmes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} \quad [\dots]$$

2.3 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition. Une combinaison linéaire d'applications $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'application $\mathcal{C}^k$ sur U avec un arc $\mathcal{C}^k$ à valeurs dans U est $\mathcal{C}^k$.

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

3.1 Matrice hessienne

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert. Pour $a \in U$, on définit la **matrice hessienne de f en a** :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque. Ainsi, pour $n = 2$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition. Pour tout $a \in U$, $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

↑
par le th de Schwarz

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Optimisation : étude au premier ordre

1.1 Extremums d'une fonction numérique

Définition. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, définie sur une partie U de E .

- Pour $a \in U$, on dit que f **atteint un maximum global en a** lorsque :

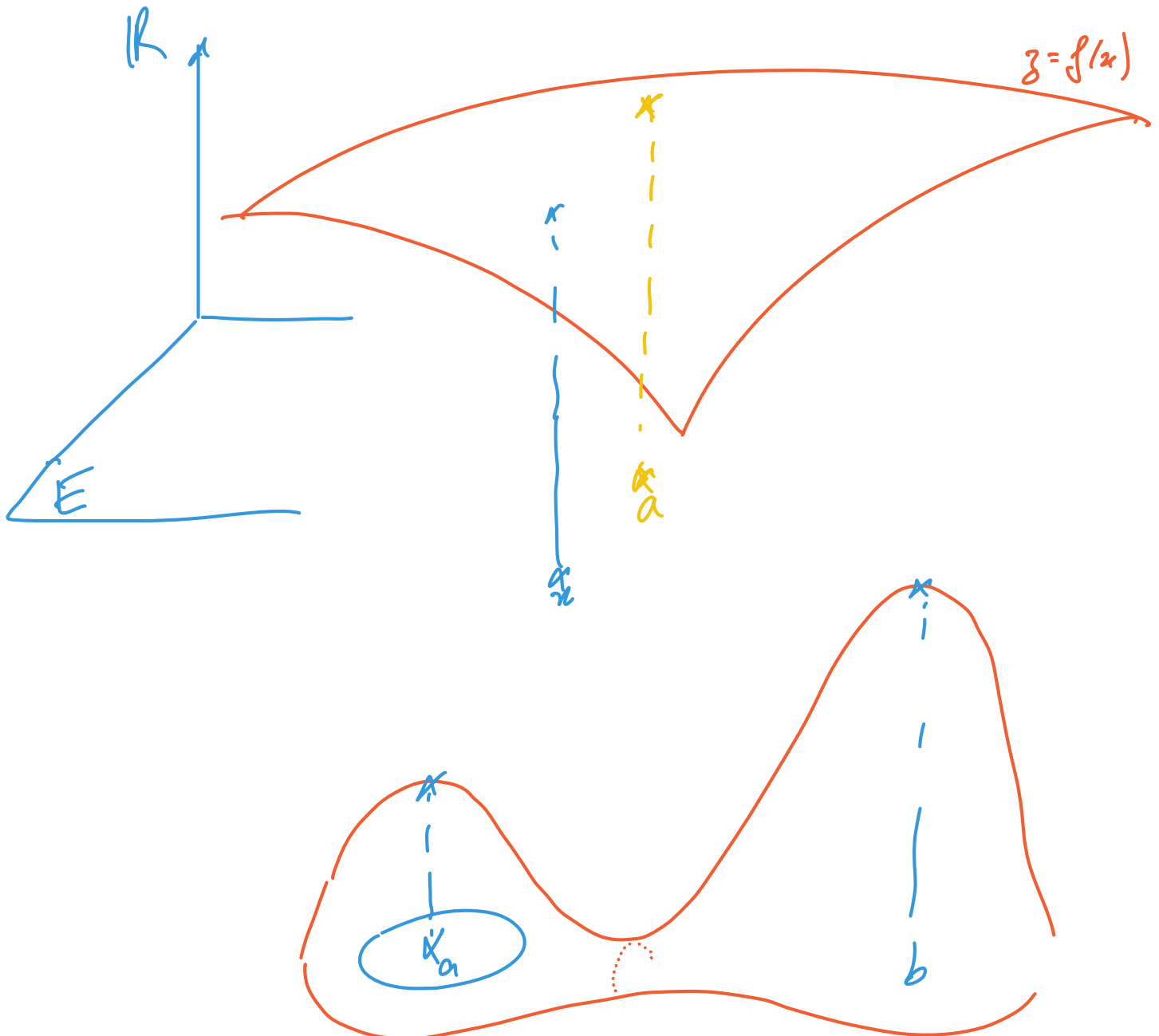
$$\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$$

- Pour a intérieur à U , on dit que f **atteint un maximum (local) en a** s'il existe un voisinage V de a dans U tel que :

$$\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

- On définit de façon analogue **minimum global** et **minimum local**.

Remarque. Sans autre précision, un extremum est un extremum local.



Définition. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, différentiable sur U ouvert, et $a \in U$. On dit que a est **un point critique** lorsque $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$.

Remarque. La différentielle de f en a est nulle si et seulement si les dérivées de f en a selon tous les vecteurs sont nulles, si et seulement si toutes les dérivées partielles (selon une base de E) de f en a sont nulles.

Si E euclidien, a point critique $\Leftrightarrow \nabla f(a) = 0$

Base de E fixée a point critique
 $\Leftrightarrow \forall k \quad \partial_k f(a) = 0$

géométriquement en a , le plan tangent à la surface
est horizontal

1.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur U et $a \in U$.

Si :

- f est différentiable sur U
- a est intérieur à U
- f admet un extremum local en a

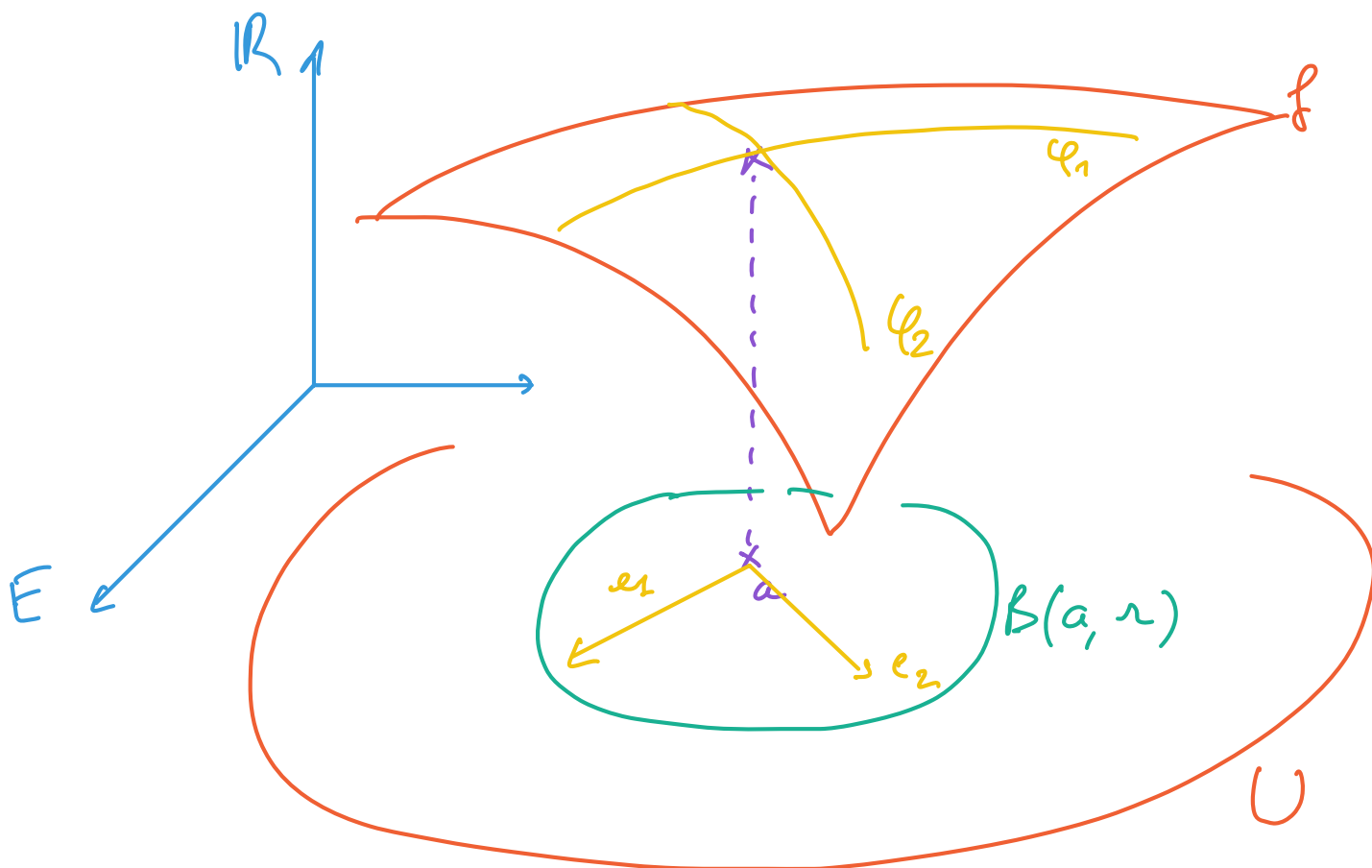
alors :

- a est un point critique de f .

Preuve: $B = (e_1 \dots e_n)$ base de E .

$$\varphi_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto f(a + te_e)$$



$a \in U$ ouvert, $\exists r > 0$ $\{ B(a, r) \subset U$

On choisit de travailler avec $\|\cdot\|_B$ de B .

Ainsi les φ_ε sont définies sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$
 f admet un extrême en a donc

φ_ε admet un extrême en 0 .

car φ_ε dérivable en 0 car f différentiable en a

$$\text{et } \varphi'_\varepsilon(0) = \partial_\varepsilon f(a)$$

$$= 0$$

$$\underline{\text{CQ}} : df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$$

ie a point critique.

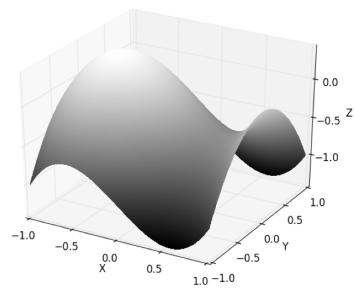
Remarque

Si f différentiable, ses extrêmes potentiels

sont : $\begin{cases} \text{soit au bord de } U \\ \text{soit en un point critique de } f. \end{cases}$

Exemple. Déterminer les points critiques de :

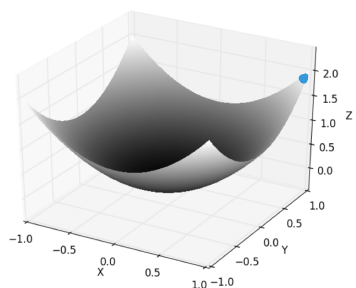
$$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$$



Exemple. Où sont les extremums de :

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?



$$\forall (x, y) \quad f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$$

minimum en $(0, 0)$

On observe que maximum en $(1, 1)$

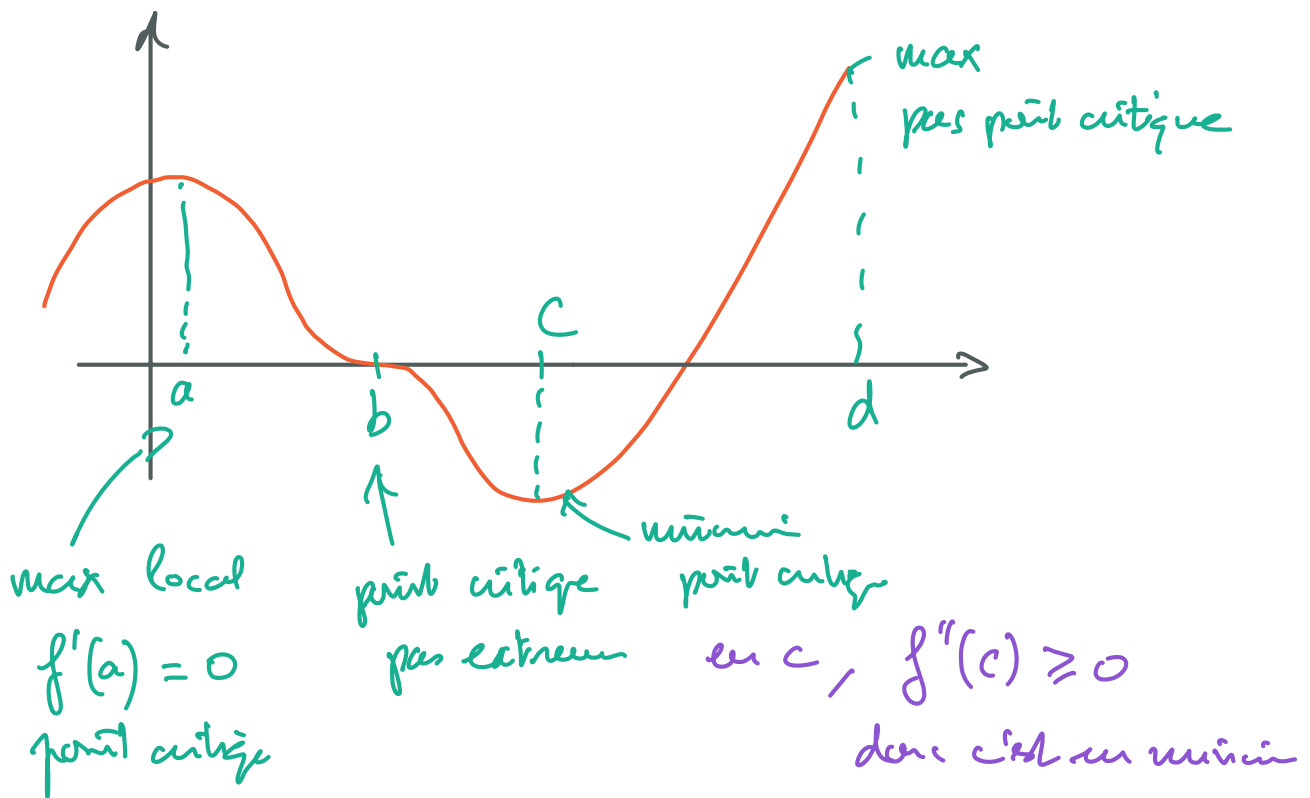
$$f(1, 1) = 2 \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in [-1, 1]^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$\nabla f(1, 1) = (2, 2) \neq (0, 0)$$

donc en $(1, 1)$ maximum, mais pas point critique



$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a) \cdot h^2 + o(h^2)$$

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h, h \rangle + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Remarque. Sous forme développée avec les dérivées partielles, l'expression s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2)$$

On reconnaît la différentielle de f en a dans le terme linéaire. Le terme suivant s'appelle « quadratique ».

3.3 Conditions du second ordre

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- f admet un minimum local en a

alors :

- $\nabla f(a) = 0$
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Remarque. De façon équivalente, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≥ 0 .

Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≤ 0 .

Preuve: On confond $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit λ vp de $H_f(a)$

$v \neq 0$ vecteur propre associé.

Au voisinage de $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + t v^T \overbrace{\nabla f(a)}^{=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} t^2 v^T \underbrace{H_f(a)}_{\lambda v} v + o(t^2) \\ &= f(a) + \frac{1}{2} t^2 \lambda \|v\|^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \lambda \|v\|^2 = \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} + o(1)$$

$$\geq 0 \quad \text{à la limite}$$

$$\text{donc } \lambda \geq 0. \quad \underline{\text{CQ}} \quad H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- a est un point critique de f
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

alors :

- f admet un minimum local strict en a

Remarque. De façon équivalente, on peut supposer que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont > 0 .

Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont < 0 .

Corollaire. Dans le cas où $n = 2$, on note :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t > 0$, alors $H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
donc f présente un minimum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t < 0$, alors $-H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
donc f présente un maximum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 < 0$, f présente un point col en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.