

TIPE $\rightarrow$ soutenance semaine de la rentrée.

Révisions $\rightarrow$ planning

$$f: E \longrightarrow F \quad a \in E$$

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a) \cdot h}_{\text{linéaire en } h} + o(h)$$

4 Opérations sur les applications différentiables, sur les applications $\mathcal{C}^1$

4.1 Linéarité

Proposition. Soit $f, g : E \rightarrow F$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables en a , alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Proposition. Si f et g admettent des dérivées en a selon un vecteur v , alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$D_v(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda D_v f(a) + \mu D_v g(a)$$

Proposition. Si E est muni d'une base $\mathcal{B}$, si f et g admettent des dérivées partielles en a alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\forall i, \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

Preuve: Au voisinage de $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(a+h) &= \lambda f(a+h) + \mu g(a+h) \\ &= \lambda (f(a) + df(a) \cdot h + o(h)) + \mu (g(a) + dg(a) \cdot h + o(h)) \\ &= \underbrace{(\lambda f + \mu g)(a)}_{\text{linéaire}} + \underbrace{(\lambda df(a) + \mu dg(a)) \cdot h}_{\text{linéaire}} + o(h) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

$$\text{Donc } d(\lambda f + \mu g)(a) \cdot v = \lambda df(a) \cdot v + \mu dg(a) \cdot v$$

$D_v(\lambda f + \mu g)(a)$. -

4.2 Composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$. Soit $B : F \times G \rightarrow H$ une application bilinéaire. Si f et g sont différentiables en a , alors $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ aussi et :

$$\forall h \in E, d(B(f, g))(a) \cdot h = B(df(a) \cdot h, g(a)) + B(f(a), dg(a) \cdot h)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors $B(f, g)$ l'est aussi.

Généralisation. Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions définies sur U ouvert de E , à valeurs dans $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Soit $a \in U$. Soit $M : F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow G$ une application p -linéaire. Si $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en a , alors $M(f_1, \dots, f_p) : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$ aussi et, pour tout $h \in E$:

$$d(M(f_1, \dots, f_p))(a) \cdot h = M(df_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)) + M(f_1(a), df_2(a) \cdot h, \dots, f_p(a)) \\ + \dots + M(f_1(a), f_2(a), \dots, df_p(a) \cdot h)$$

Proposition. Si les f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors $M(f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow F \\ g &: E \longrightarrow G \\ B(f, g) &: E \longrightarrow H \\ x &\longmapsto B(f(x), g(x)) \end{aligned} \quad B: F \times G \longrightarrow H \text{ bilinéaire.}$$

Autour de $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} B(f, g)(a+h) &= B(f(a+h), g(a+h)) \\ &= B \left(f(a) + df(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_1(h), \right. \\ &\quad \left. g(a) + dg(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_2(h) \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \underbrace{B(f(a), g(a))}_{\text{linéaire}}$$

$$+ \underbrace{B(f(a), dg(a) \cdot h) + B(df(a) \cdot h, g(a))}_{\text{linéaire}}$$

$$+ \left[\|h\| B(\varepsilon_1(h), g(a) + dg(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_2(h)) \right.$$

$$+ B(df(a) \cdot h, dg(a) \cdot h)$$

$$\left. + o(df(a) \cdot h, \|h\| \varepsilon_2(h)) \right]$$

$o(h) ?$

B bilinéaire sur $F \times G$ de dim finie, donc continue
 donc $\exists C \in \mathbb{R} \forall (x, y) \in F \times G, \|B(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|$
 $\| \|h\| B(\varepsilon_1(h), g(a) + \dots) \|$
 $\leq \|h\| \underbrace{C \|\varepsilon_1(h)\| \|g(a) + \dots\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$

de même pour les autres termes.

CG:
$$d[B(f, g)(a)] \cdot h = B(f(a), dg(a) \cdot h) + B(df(a) \cdot h, g(a))$$

4.3 Composition d'applications différentiables

Règle de la chaîne. Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ deux applications, avec f définie sur U ouvert de E , g définie sur V ouvert de F et f à valeurs dans V .
Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U .

Remarque Attention à l'ordre de la composition.

$$f: \underset{a, h}{E} \longrightarrow \underset{f(a)}{F}$$

$$df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$g: \underset{f(a)}{F} \longrightarrow G$$

$$dg(b) \in \mathcal{L}(F, G)$$

Preuve:

Au voisinage de $h \rightarrow 0$

$$(g \circ f)(a+h) = g[f(a+h)]$$

$$= g \left[\underbrace{f(a)}_b + \underbrace{df(a) \cdot h}_H + \|h\| \varepsilon(h) \right]$$

$$\text{ou } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{ou } H \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{par continuité de } df(a) \text{ linéaire et donc finie}$$

$$= g(f(a)) + dg(f(a)) \cdot H + o(H)$$

$$= g \circ f(a) + dg(f(a)) \cdot (df(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h)) + o(h)$$

per linéarité

$$\begin{aligned} &= \underbrace{g \circ f(a)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{dg(f(a)) \cdot (df(a) \cdot h)}_{\text{linéaire en } h} \\ &\quad + \|h\| \underbrace{\left(dg(f(a)) \cdot \varepsilon(h) + \varepsilon_2(h) \right)}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0 \\ 0 \\ \text{par continuité de } dg(f(a)) \\ \text{linéaire, avec } \varepsilon(h) \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

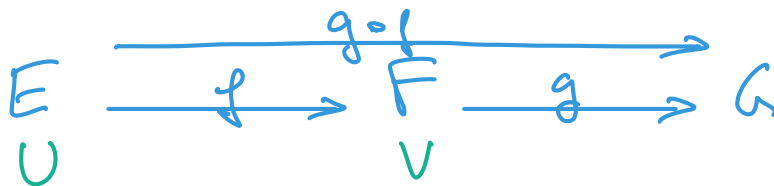
$$\text{Donc } d(g \circ f)(a) \cdot h = dg(f(a)) \cdot (df(a) \cdot h)$$

$$\text{ce } d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

$$\hat{A} \text{ rapprocher de } (g \circ f)' = g' \circ f' \times f'$$

Remarque Si E, F, G sont munis de bases, les différentiels sont représentés par les matrices jacobiniennes

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$



4.4 Dérivée le long d'un arc

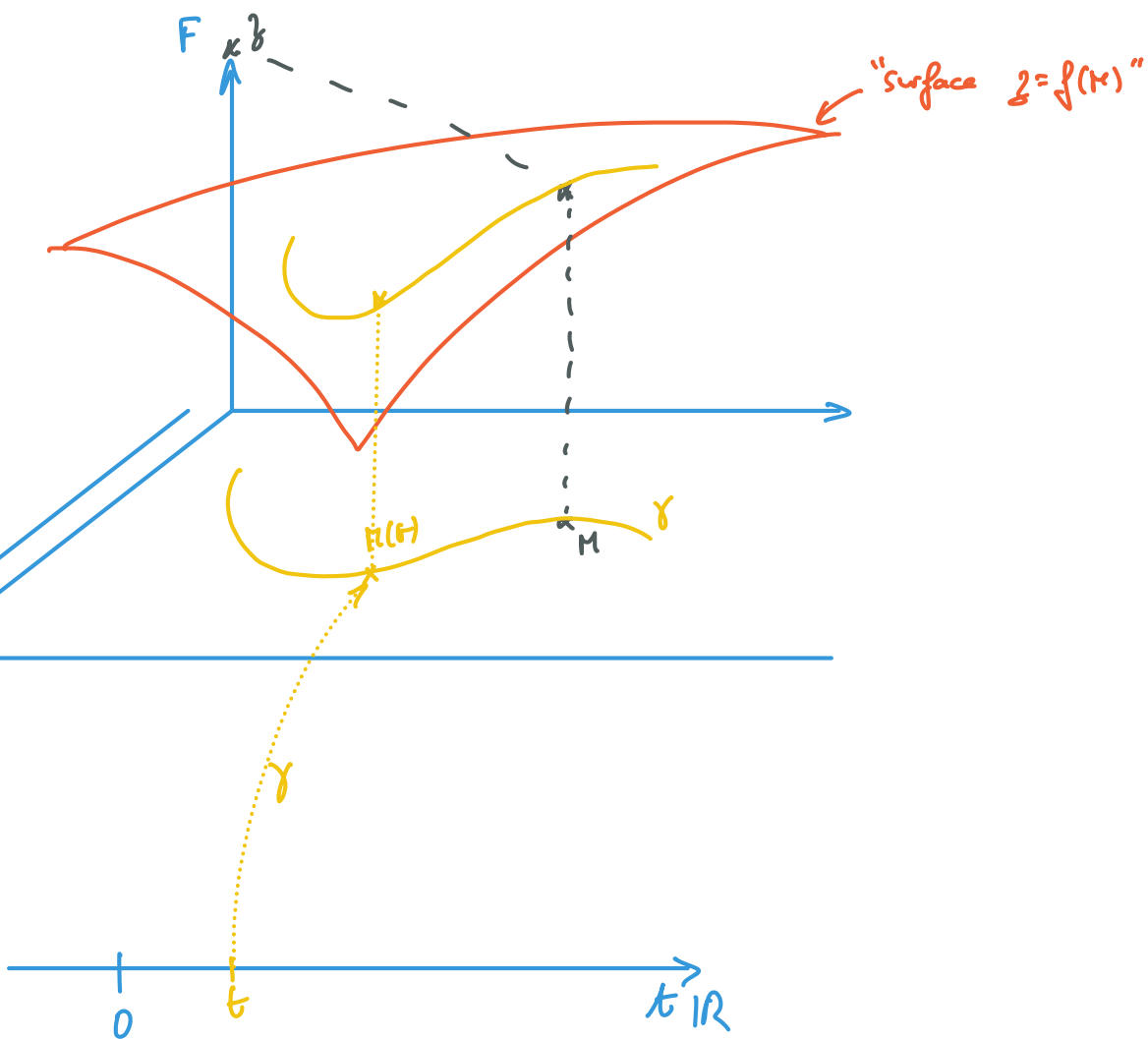
Dérivée le long d'un arc. Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{f} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U . Soit $t \in I$. Si γ est dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Dans le cas où E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et que $x_1, \dots, x_n$ désignent les applications coordonnées de γ dans cette base, cela s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^n x'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Proposition. Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et U respectivement, alors $f \circ \gamma$ est $\mathcal{C}^1$ sur I .



$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Preuve: Au voisinage de $h \rightarrow 0$

$$f \circ \gamma(t+h) = f\left(\gamma(t) + \underbrace{h \gamma'(t) + h \varepsilon(h)}_H\right)$$

où $H \rightarrow 0$

$$= f(x(t)) + df(x(t)) \cdot h + o(h)$$

$$= f(x(t)) + df(x(t)) \cdot (h x'(t) + h \varepsilon(h)) + o(h)$$

$$= \underbrace{f(x(t))}_{\text{indépendant de } h} + \underbrace{h df(x(t)) \cdot x'(t)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{h df(x(t)) \cdot \varepsilon(h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + o(h)$$

par continuité
de $df(x(t))$

D'où le résultat.

Utilisation pratique

$$\begin{array}{ccccc} g: & \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

$$g'(t) = df(x(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ dérivées partielles.

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t)) \cdot y'(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[f(x(t), y(t)) \right] = \frac{\partial f}{\partial x} \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \times y'(t)$$

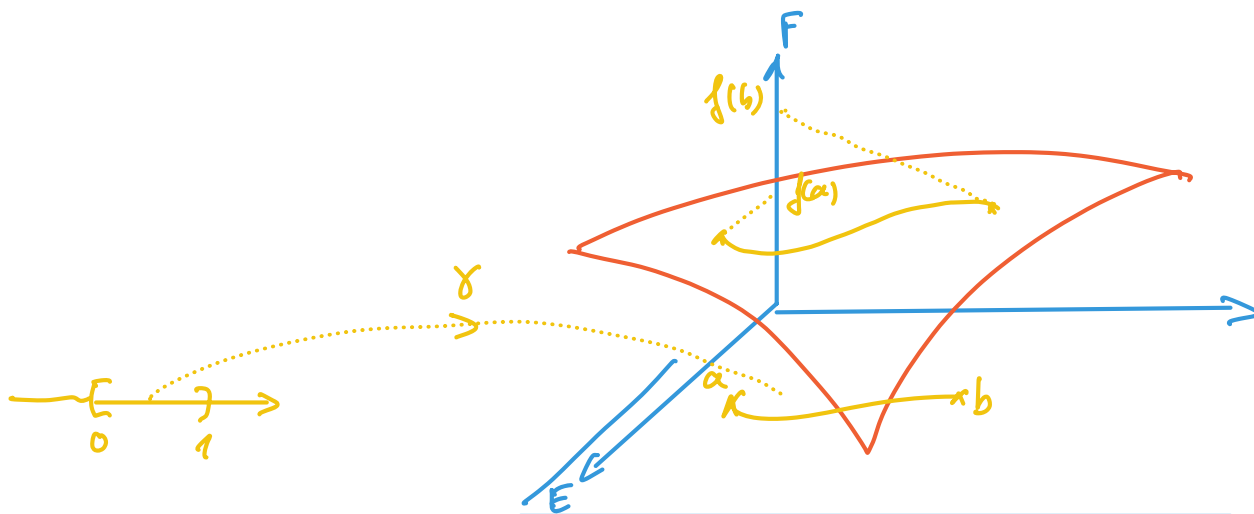
$$\frac{d}{dt} (f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

Corollaire. Soit $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{f} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle $[0, 1]$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U . Soit $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Remarque. En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$:

$$f(a + v) = f(a) + \int_0^1 df(a + tv) \cdot v dt$$



$$\begin{array}{ccccc} [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & E & \xrightarrow{f} & F \\ 0 & \longmapsto & a & \longmapsto & f(a) \\ 1 & \longmapsto & b & \longmapsto & f(b) \end{array}$$

$f \circ \gamma$ est donc

$$f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt$$

$$\text{soit } f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Exemple. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $t : (u(t), v(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$h : t \mapsto f(u(t), v(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u et v .

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt} (f(u(t), v(t))) \\ &= \underbrace{\partial_1 f}_{\partial_1 f(u(t), v(t))} \times u'(t) + \partial_2 f \times v'(t) \\ &\quad \partial_2 f(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

4.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée

Exemple. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow F \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V , et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et à valeurs dans V .

On considère la composée :

$$h : (u, v) \mapsto f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$$

Justifier que h est $\mathcal{C}^1$ sur U , et exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f et g .

$$h(u, v) = f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$$

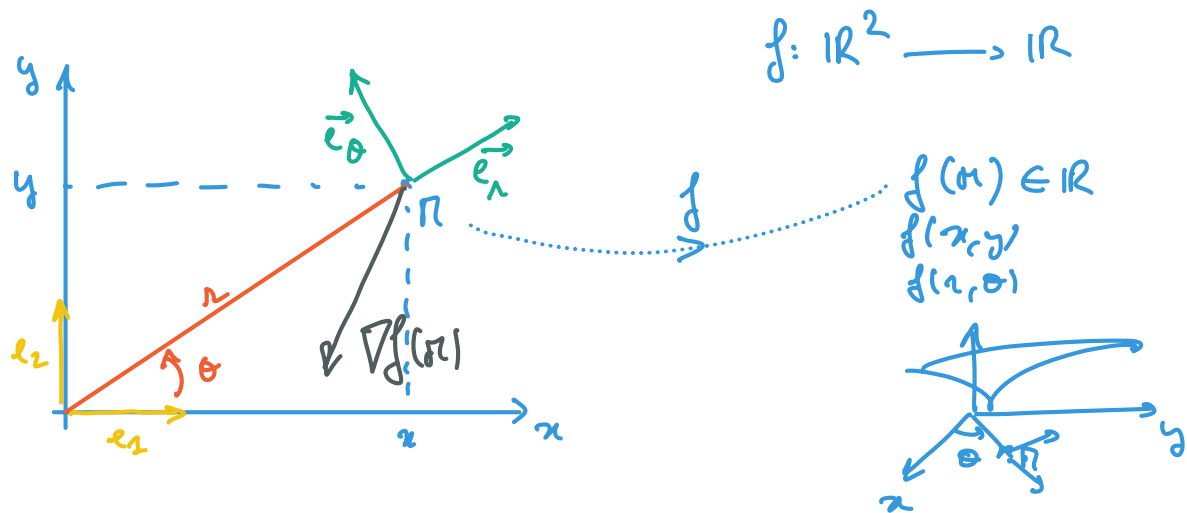
$$\partial_1 h(u, v) = \partial_1 f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)) \times \partial_1 g_1(u, v) + \dots$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \partial_1 f \times \partial_1 g_1(u, v) + \partial_2 f \times \partial_1 g_2(u, v) + \partial_3 f \times \partial_1 g_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \times \frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \times \frac{\partial g_3}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \times \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \times \frac{\partial x_3}{\partial u}$$

Exemple. Dans le plan euclidien usuel, exprimer le gradient en coordonnées polaires.



$$\nabla f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial r}(M) \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2$$

En fait, on compare:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \xrightarrow{\quad} & f(x, y) \\ (r, \theta) & \xrightarrow{\quad} & (r \cos \theta, r \sin \theta) & \xrightarrow{\quad} & f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (f(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(M) (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

On suppose $r \neq 0$ i.e. $r \neq 0$

$$\cos \theta (1) - \frac{1}{r} \sin \theta (2) : \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$$

$$\sin \theta (2) + \frac{1}{r} \cos \theta (1) : \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$$

Answer

$$\nabla f(r) = \left(\cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) \vec{e}_1 + \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) \vec{e}_2$$

$$= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \underbrace{\left(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \right)}_{\vec{e}_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \underbrace{\left(-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \right)}_{\vec{e}_\theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

Exemple. Écrire les dérivées partielles de :

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m(u_1, \dots, u_m))$$

4.6 Caractérisation des applications constantes

Théorème.

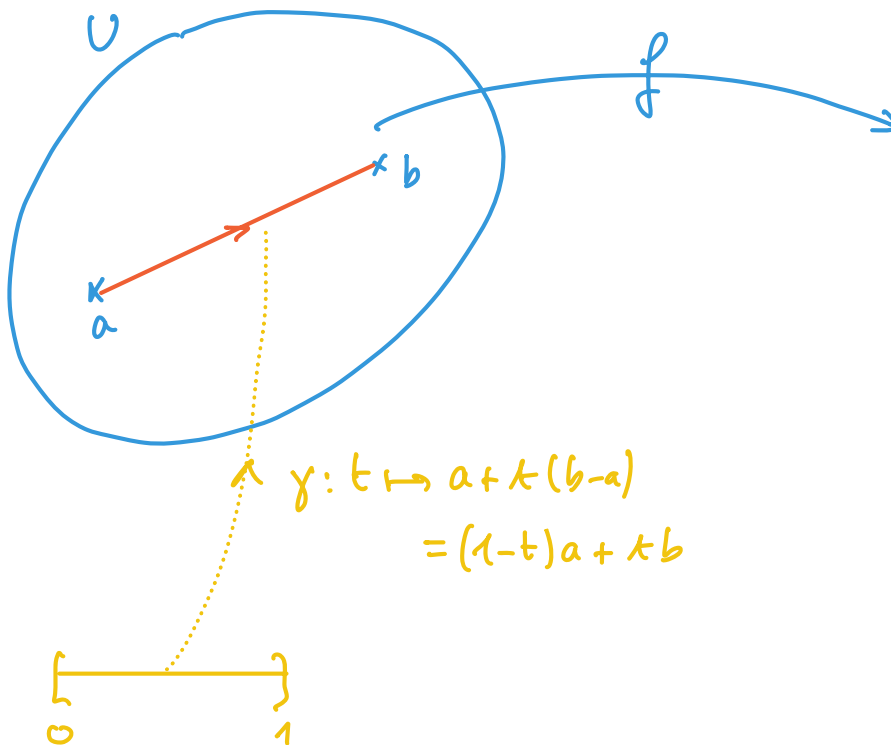
Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } U \iff df \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. Le résultat est encore valable si U n'est que connexe par arcs.

Preuve: $\Rightarrow$ oui : $f(a+h) = f(a) + 0 \cdot h + o(h)$

$\Leftarrow$ On suppose $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \quad \forall a \in U$.



Pour $a, b \in U$ on note $\gamma: [0, 1] \longrightarrow E$
 $t \longmapsto (1-t)a + tb$

Comme U est convexe, γ est à valeurs dans U .

On peut donc considérer $f \circ \gamma$. On a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 0 \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= 0$$

donc f est constante.

