

Calcul différentiel

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1 Dérivée selon un vecteur

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . Soit $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f admet un dérivée en a selon v lorsque :

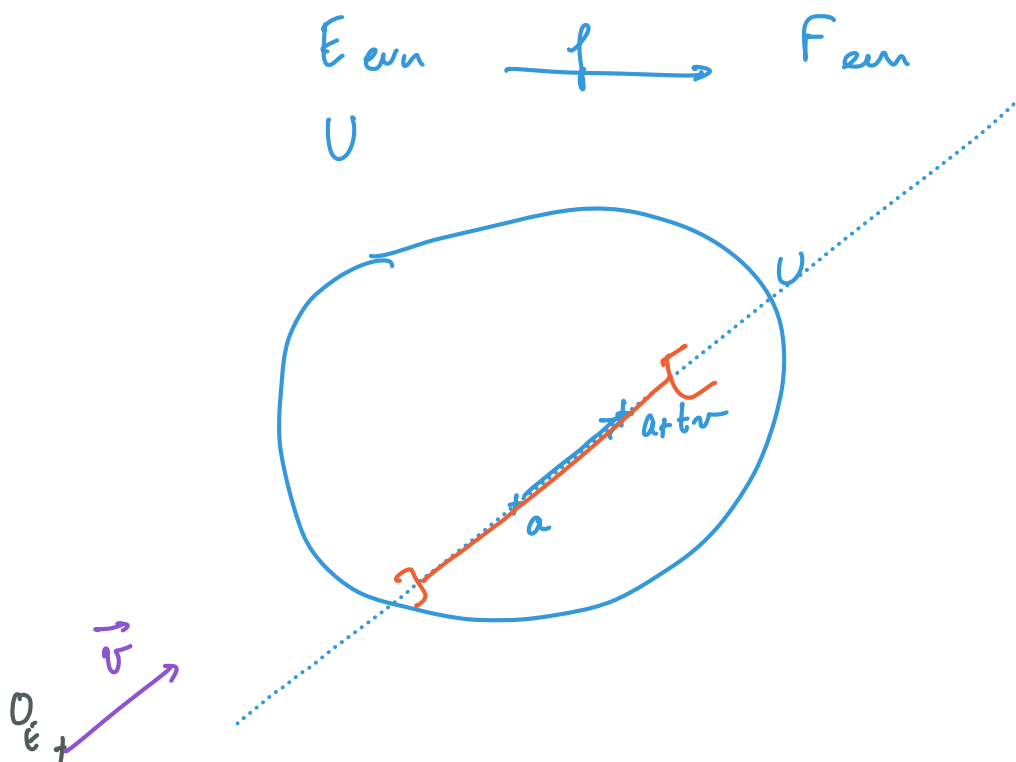
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow F \\ t &\mapsto f(a + tv) \end{aligned}$$

est dérivable en 0.

Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ la dérivée en 0 de cette application, et on l'appelle **dérivée de f en a selon v** .

Remarque.

- Comme U est ouvert, c'est un voisinage de a , et donc il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall t \in [-\delta, \delta]$, $a + tv \in U$: la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est définie au voisinage de 0.
- $D_v f(a)$ est un élément de F .



Exemple. On considère :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

$$f((0, 0) + t(\alpha, \beta)) = f(t\alpha, t\beta) \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$= \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4}$$

$$= \frac{t \alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4}$$

Cas $\alpha \neq 0$:

$$= \frac{1}{\alpha^2} (t \alpha \beta^2) \cdot \frac{1}{1 + t^2 \frac{\beta^4}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} (t \alpha \beta^2) \left(1 - t^2 \frac{\beta^4}{\alpha^2} + o(t^2) \right)$$

$$= 0 + \frac{\beta^2}{\alpha} t + o(t)$$

donc $t \mapsto f((0, 0) + t(\alpha, \beta))$ admet en 0, la dérivée $\frac{\beta^2}{\alpha}$

$$\text{Donc } D_{(\alpha, \beta)} f(0, 0) = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

$$\text{Cas } \alpha = 0 \quad f((0, 0) + t(0, \beta)) = 0$$

$$\text{donc } D_{(0, \beta)} f(0, 0) = 0$$

1.2 Dérivées partielles dans une base

Définition. On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur U ouvert de E , et $a \in U$.

Si f est dérivable en a selon e_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on dit que f admet des dérivées partielles dans la base $\mathcal{B}$, et on note :

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a)$$

Remarque.

- En notant $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de a , $\partial_i f(a)$ est, si elle existe, la dérivée en a_i de :

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + \color{blue}{a_i e_i + t e_i} + \dots + a_n e_n)$$

- On utilise aussi la notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour désigner $\partial_i f(a)$.
- Lorsqu'une base $\mathcal{B}$ de E est fixée, on identifie $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
- Souvent, $E = \mathbb{R}^2$ (ou $E = \mathbb{R}^3$) et la base $\mathcal{B}$ est canonique. On note alors $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Cas où $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \text{base canonique} = (e_1, e_2)$ $e_1 = (1, 0)$
 $e_2 = (0, 1)$

On fixe $(a, b) \in E$

La 1^{re} dérivée partielle de f en (a, b) est $D_{(1,0)} f(a, b)$

ce la dérivée en 0 de $t \mapsto f(a+t, b)$.

Cela revient à dériver f par rapport à sa 1^{re} variable, la 2^{de} fixée.

"Les dérivées partielles sont les dérivées de applications partielles"

1^{re} appli partielle : $x \mapsto f(x, y)$ où y fixé

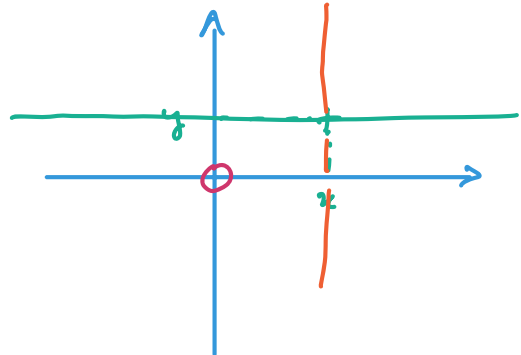
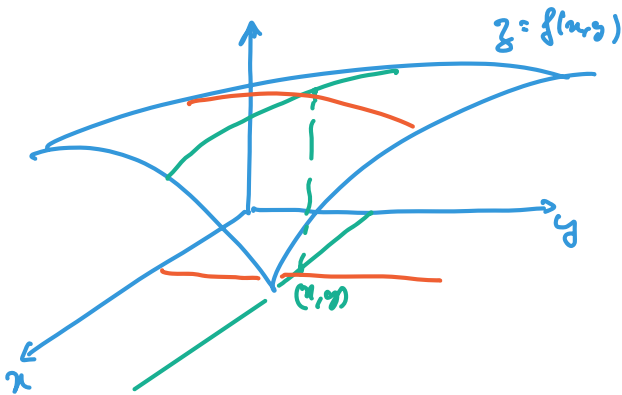
2^{de} ————— $y \mapsto f(x, y)$ où x fixé.

Exemple. On considère :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point, et les calculer.



$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} ? \quad \text{On fixe } y$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ cas : } (x, y) = (0, 0)$$

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donc dérivable en 0, de dérivée nulle donc $\partial_x f(0, 0) = 0$

$$\text{2}^{\text{e}} \text{ cas : } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (\text{localiser})$$

derivable en tout que fonction de x ,

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \frac{y^2(x^2 + y^4) - xy^2(2x)}{(x^2 + y^4)^2} \\ &= \frac{y^6 - x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Bref : } \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^6 - x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même $\partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque:

Pour cette f , f admet des dérivées partielles en tout point. Elle admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$.

Pourtant, f n'est pas continue en $(0,0)$:

$$f(t^2, t) = \frac{1}{2} \not\rightarrow_{t \rightarrow 0} f(0,0)$$

Exemple. Calculer les trois dérivées partielles dans la base canonique, en un point quelconque, de l'application :

$$f : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

en (r, φ, θ) , la 1^{re} application partielle est

$$f(\cdot, \varphi, \theta) : r \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

$$\text{donc } \partial_1 f(r, \varphi, \theta) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

$$\underline{\text{Deuxième}} \quad \partial_2 f(r, \varphi, \theta) = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\partial_3 f(r, \varphi, \theta) = \dots$$

2 Différentielle

2.1 Notation $o(h)$

Définition. Soit $\alpha : E \rightarrow F$ définie sur un voisinage de 0_E . On dit que :

$$\alpha(h) = o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

lorsque $\|\alpha(h)\|_F = o_{h \rightarrow 0_E}(\|h\|_E)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\|h\|_E} \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a \in \mathbb{R}$$

f dérivable en $a \iff f$ admet une DL₁(a)

$$\iff \exists l \in \mathbb{R} \text{ tq}$$

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{l \cdot h}_{\text{"linéaire"}} + o(h)$$

et alors $l = f'(a)$

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto l \cdot h$$

forme linéaire

2.2 Différentielle d'une application en un point

Rappel. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I , et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

et l'application $h \mapsto \ell h$ est linéaire. C'est cette application linéaire qui permet la généralisation de la dérivation aux fonctions de variable vectorielle.

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U , et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a lorsqu'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

L'application ℓ est alors unique, et appelée différentielle de f en a , notée $df(a)$.

Remarque.

- La différentielle de f en a s'appelle aussi **application linéaire tangente à f en a** .
- La différentiabilité de f en a , c'est l'existence d'un **développement limité à l'ordre 1 en a** :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

où $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On note souvent $df(a) \cdot h$ pour désigner $(df(a))(h)$.

Exemple. Déterminer la différentielle en $a = (2, 1)$ de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$$

Au voisinage de $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

$$f((2, 1) + (h, k)) = f(2+h, 1+k)$$

$$= (2+h)^2 (1+k)^3$$

$$= (4 + 4h + h^2) (1 + 3k + 3k^2 + k^3)$$

$$= 4 + (4h + 12k) + \underbrace{(h^2 + 12hk + 12k^2 + 3h^2k + \dots)}_{o((h, k))}$$

$$h^2 = |h|. |h| \leq \|(h, k)\|_\infty \cdot |h| \xrightarrow{\quad} 0$$

$$\text{donc } h^2 = o((h, k))$$

de même pour tous les autres termes.

$$f((1, 2) + (h, k)) = \underbrace{4}_{f(1, 2)} + \underbrace{(4h + 12k)}_{\text{linéaire en } (h, k)} + o((h, k))$$

C'est $df(1, 2) \cdot (h, k)$

$$\underline{\text{Cq}} : df(1, 2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$(h, k) \mapsto 4h + 12k$$

Exemple. Calculer la différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 \end{array}$$

À un voisinage de $H \rightarrow 0$ où $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(M+H) &= (M+H)^2 \\ &= (M+H)(M+H) \\ &= \underbrace{M^2} + \underbrace{HM + MH} + \underbrace{H^2} \end{aligned}$$

On choisit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{où } \|H^2\| \leq \|H\|^2 = \|H\| \times \|H\| \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc } H^2 = o(H)$$

$$\underline{\text{Et}} \quad H \mapsto HM + MH \text{ est linéaire}$$

$$\underline{\text{Donc}} \quad \underline{df(M) : H \mapsto HM + MH}$$

(C'est une application de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$).

Exemple. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E . Montrer que :

$$f : x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$$

est différentiable en tout $a \in E$, et calculer sa différentielle.

Au voisinage de $h \rightarrow 0$ ($h \in E$).

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \langle a+h, u(a+h) \rangle \\ &= \langle a+h, u(a) + u(h) \rangle \\ &= \underbrace{\langle a, u(a) \rangle}_{f(a)} + \underbrace{\langle h, u(a) \rangle + \langle a, u(h) \rangle}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{\langle h, u(h) \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } |\langle h, u(h) \rangle| &\leq \|h\| \|u(h)\| \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|h\| \|u\| \|h\| \\ &= o(h) \end{aligned}$$

Donc f différentiable en a

$$\begin{aligned} \text{et } df(a) : h &\longmapsto \langle h, u(a) \rangle + \langle a, u(h) \rangle \\ &= 2 \langle h, u(a) \rangle \end{aligned}$$

car u autoadjoint.

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ définie sur U ouvert.

- Si f est constante, alors elle est différentiable en tout point de U et :

$$\forall a \in U, df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

- Si f est (la restriction d'une application) linéaire, alors elle est différentiable en tout point de U et :

$$\forall a \in U, df(a) = f$$

Au voisinage $h \rightarrow 0$

$$f(a+h) = f(a) + f(h) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \underbrace{f(a)}_{f(a)} + \underbrace{f(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{o(h)}$$

Donc $df(a) = f$ lorsque f est linéaire.

Proposition. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Au voisinage de $h \rightarrow 0$,

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h)$$

$\downarrow_{h \rightarrow 0}$
 0

et $df(a)$ linéaire sur E de dim finie, donc

$$df(a) \text{ est continue, donc } df(a) \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Bref: } f(a+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$$

Proposition. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées en a selon tout vecteur et :

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v$$

Corollaire. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$ et :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

où $(h_1, \dots, h_n)$ sont les coordonnées de h dans $\mathcal{B}$.

Preuve: On suppose f différentiable en a .

$$f(a+tv) \quad \text{au voisinage de } t \rightarrow 0$$

$$= f(a) + df(a) \cdot (tv) + o(tv)$$

$$= f(a) + t \cdot df(a) \cdot v + o(t)$$

par linéarité de $df(a)$

c'est un $DL_1(0)$ de $t \mapsto f(a+tv)$

donc $t \mapsto f(a+tv)$ dérivable en 0, de dérivée

$$df(a) \cdot v.$$

$$\text{Donc } D_v f(a) = df(a) \cdot v$$

Lien avec les dérivées partielles

$$\text{Car on a } f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{e_1} f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_{e_2} f$$

Donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} df(a) \cdot (x, y) &= df(a) \cdot (xe_1 + ye_2) \\ &= x \cdot df(a) \cdot e_1 + y \cdot df(a) \cdot e_2 \\ &\quad \text{par linéarité de } df(a) \\ &= x \cdot D_{e_1} f(a) + y \cdot D_{e_2} f(a) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(a) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{aligned}$$

$$df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$$

en fixant des bases de E et F ,

en identifiant $E \simeq \mathbb{R}^n$ et $F \simeq \mathbb{R}^p$

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

↳ on la représente par une matrice "Jacobienne"
dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$

On note $f(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), \dots, f_p(x_1 \dots x_n))$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$$

Définition. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, lorsque $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en a , on appelle **matrice jacobienne de f en a** la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

où $f_1, \dots, f_p$ sont les fonction coordonnées de f .

$$df(a).h \in F$$

$$df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$df : a \longmapsto df(a) \in \mathcal{K}(U, \mathcal{L}(E, F))$$

2.3 Différentielle d'une application sur un ouvert

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On dit que f est **différentiable sur U** lorsqu'elle est différentiable en tout point $a \in U$. On appelle **différentielle de f sur U** l'application :

$$\begin{array}{ccc} df : U & \rightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ a & \mapsto & df(a) \end{array}$$

Remarque. Les physiciens écrivent :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

et ils ont bien raison.

En effet, en notant $x_i : x \mapsto x_i$ l'application qui, à un vecteur x de E , associe sa coordonnée x_i dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , on définit une application linéaire. On a donc :

$$\forall a \in U, dx_i(a) = x_i$$

et donc, pour tout $h \in E$:

$$dx_i(a) \cdot h = x_i(h) = h_i$$

Finalement, pour tout $a \in U$, on a les égalités dans F :

$$\begin{aligned} \forall h \in E, df(a) \cdot h &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(a) \cdot h \end{aligned}$$

donc, dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\forall a \in U, df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(a)$$

ce qui peut encore s'écrire, dans $(\mathcal{L}(E, F))^U$:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$: fonctions d'une variable réelle

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow F$ une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U , et $a \in U$.
 f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a . Dans ce cas :

$$f'(a) = df(a) \cdot 1$$

Remarque. Ainsi, l'application linéaire tangente de f en a est l'application :

$$h \mapsto f'(a)h$$

$$df(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad \text{forme linéaire}$$

E euclidien "Représentation des formes linéaires"

$$df(a) = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$$

$\uparrow$
gradient de f en a .

2.5 Cas où E est euclidien

Définition. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un ouvert U , et $a \in U$. On suppose que E est un espace euclidien, et que f est différentiable en a .

Alors il existe un unique vecteur, appelé **gradient de f en a** , et noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

$\text{grad } f(a)$
 $\overline{\text{grad } f(a)}$

Remarque. Ainsi, lorsque f est différentiable en a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$$

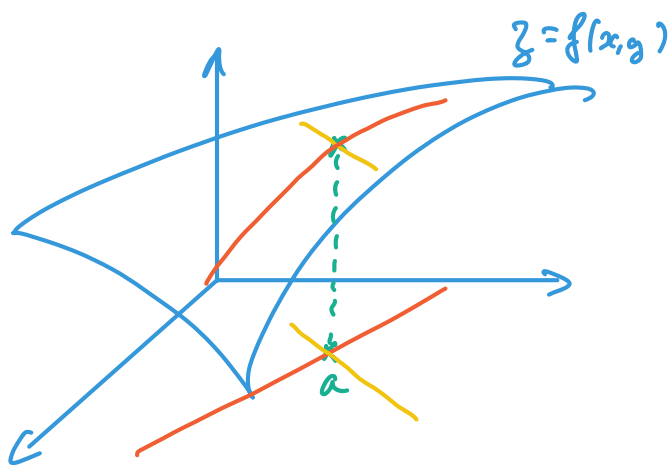
En particulier, lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Interprétation géométrique. Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Remarque. Bref, $\nabla f(a)$ indique la direction de plus grande variation de f : le vecteur unitaire v pour lequel $D_v f(a)$ est maximale est :

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$$



$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(h)$$

$$f(a+h) - f(a) \simeq \langle \nabla f(a), h \rangle$$

$$\text{1er cas } h \perp \nabla f(a) \quad f(a+h) \simeq f(a)$$

$$|f(a+h) - f(a)| \simeq |\langle \nabla f(a), h \rangle|$$

$$\leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$$

$|f(a+h) - f(a)|$ est au max $\|\nabla f(a)\| \|h\|$

en particulier si $\nabla f(a)$ et h sont colinéaires

3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U lorsqu'elle est différentiable en tout point de U , et que :

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est continue sur U .

Remarque. Comme $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U . Dans ce cas :

$$df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Remarque. Ce résultat est indépendant du choix de la base.

Exemple. Montrer que :

$$h : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple. Montrer que :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^6 - x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\partial_2 f$ est la dérivée de l'application partielle $f(x, \cdot)$

$$\text{si } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, \cdot) : y \mapsto 0 \quad \partial_2 f(0, 0) = 0$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$, le calcul

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \partial_2 f(x, y) &= \frac{2xy(x^2 + y^4) - xy^2(4y^3)}{(x^2 + y^4)^2} \\ &= \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2 + y^4)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2 + y^4)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues par opérations.

donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Em (0,0) :

On a montré que f n'est continue en $(0,0)$
donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ "en $(0,0)$ "

