

Suites et séries de fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des suites et des séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on l'adapte aux fonctions entre deux evn de dimensions finies.

1 Suites de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur A partie de E evn de dimension finie, à valeurs dans F evn de dimension finie, et $f : A \rightarrow F$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement vers f sur A** si et seulement si, pour tout $x \in A$ fixé :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque.

- Pour faire l'étude pratique de la convergence simple, on commence par fixer $x \in A$, et on étudie la suite (vectorielle, d'éléments de F) $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
- On peut quantifier cette définition par :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

↑
dépend de n

1.2 Interlude : la norme infinie sur un evn de dimension finie

Définition. Soit F un evn de dimension finie, et $A \subset E$ une partie d'un evn de dimension finie. On définit sur $\mathcal{B}(A, F)$, l'espace des fonctions bornées $A \rightarrow F$, la **norme infinie** en posant, pour $f \in \mathcal{B}(A, F)$:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in A} (\|f(x)\|_F)$$

Proposition. Si on change la norme de F en une norme qui lui est équivalente, on change la norme N_∞ en une norme qui lui est équivalente.

Remarque. On suppose F de dimension finie, et donc $\|\cdot\|_F^1$ et $\|\cdot\|_F^2$ sont automatiquement équivalentes. La proposition précédente permet de justifier que N_∞^1 et N_∞^2 sont toujours équivalentes, même si l'espace vectoriel $\mathcal{B}(A, F)$ n'est pas de dimension finie.

E evn quelconque

F ev norme de dim finie

$\|\cdot\|_F$

$$f : E \longrightarrow F$$

f est bornée ssi $\exists M \geq 0 \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M$

indép de x

On peut définir

$$\sup_{x \in E} \|f(x)\|_F$$

notée

~~$\|f\|_\infty$~~

$N_\infty(f)$

1.3 Convergence uniforme

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur A partie de E evn de dimension finie, à valeurs dans F evn de dimension finie, et $f : A \rightarrow F$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f sur A** si et seulement si la suite numérique $(N_\infty(f_n - f))_n$ converge vers 0.

Remarque.

- Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, au moins à partir d'un certain rang, la fonction $f - f_n$ soit bornée sur A .
- On peut quantifier la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

↑
indép de x

Théorème.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} f$ i.e. $\forall n, f_n - f$ bornée
et $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Soit $x \in A$ fixé.

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f .
- On cherche à majorer $\|f_n(x) - f(x)\|_F$ **indépendamment** de $x \in A$ par une suite numérique qui converge vers 0.
- Le calcul explicite de $N_\infty(f_n - f)$ est parfois possible.

Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f .
- S'il n'existe pas de rang à partir duquel $f_n - f$ est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- On peut montrer le **non-transfert** à la limite d'une propriété, comme la continuité.
- On exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.

1.4 Convergence uniforme sur tout compact

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $A \subset E : F$ et $f : A \rightarrow F$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge vers f uniformément sur tout compact** si et seulement si pour tout compact $K \subset A$, $(f_{n|K})_n$ converge uniformément vers $f|_K$ sur K .

1.5 Continuité de la limite

Transfert de continuité par convergence uniforme

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F .

Si :

- pour tout n , f_n est continue en a . (resp. sur A)
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur A (ou sur un voisinage de a) vers f ,

alors :

- f est continue en a . (resp. sur A)

Corollaire. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f , que les f_n sont continues sur A mais que f n'est pas continue sur A , alors la convergence n'est pas uniforme sur A .

Raisonnement classique. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f , que les f_n sont continues sur A et qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de A , alors f est continue sur tout compact de A donc sur A .

preuve:

Idée:
$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par déf de $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ avec $\frac{\varepsilon}{3}$

$\exists N$ tq $\forall n \geq N \quad N_n(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Par déf de f_N continue en a avec $\frac{\varepsilon}{3}$

$\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in B(a, \eta) \cap A \quad \|f_N(x) - f_N(a)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Pour $x \in B(a, \eta) \cap A$,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\|_F &\leq \|f(x) - f_N(x)\|_F + \|f_N(x) - f_N(a)\|_F + \|f_N(a) - f(a)\|_F \\ &\leq 2 N_n(f - f_N) + \|f_N(x) - f_N(a)\|_F \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc f continue en a .

1.6 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F et a un point adhérent à A .
Si :

- pour tout n , $f_n(x)$ admet une limite finie ℓ_n lorsque $x \rightarrow a$,
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I ,

alors :

- la suite $(\ell_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,
- $f(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow a$,
- cette limite est égale à ℓ .

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

- Le théorème s'applique aussi lorsque $A \subset \mathbb{R}$ et que $a = \pm\infty$ est adhérent à A .

1.7 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

Lemme. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans F , et $a \in I$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $K \subset I$,
- les f_n sont continues.

alors, en notant $G_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ et $G(x) = \int_a^x f(t) dt$,

- $(G_n)_n$ converge uniformément vers G sur tout segment de I .

Remarque. Ainsi, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation, à condition de prendre les primitives qui s'annulent toutes en un même point a donné.

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans F .
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$,
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

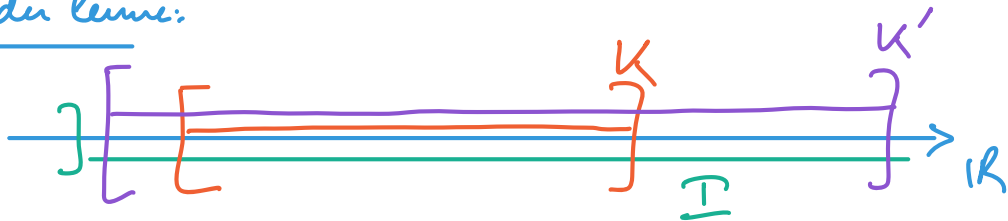
- la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

Preuve du lemme:



Soit K segment de I . Quitte à agrandir K , on suppose $a \in K$.

Soit $x \in K$.

$$\begin{aligned} \|G_n(x) - G(x)\|_F &= \left\| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\|_F \\ &= \left\| \int_a^x f_n(t) - f(t) dt \right\|_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^x \|f_n(t) - f(t)\|_F dt \quad \text{pour } n \geq a \\
&\leq \int_a^x N_\infty^K(f_n - f) dt \\
&= (x-a) N_\infty^K(f_n - f) \\
&\leq \text{diam}(K) N_\infty^K(f_n - f) \quad \text{idem si } x \leq a \\
&\quad \text{indép de } n \\
&\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

$$\text{ou } \text{diam } K = \text{Max}(K) - \text{Min}(K)$$

$$\text{Donc } G_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{converge}} G.$$

1.8 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I intervalle, à valeurs dans F .
Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f ,
- la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g ,

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- $f' = g$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $(f_n)_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $(f'_n)_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Preuve: Fixons $a \in I$.

- les f_n sont continues et $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers g
donc par transfert de continuité, g est continue sur I .

Pour $x \in I$, on définit

$$h(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

Comme g est continue, h est $\mathcal{C}^1$ et $h' = g$.

En f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I donc, à x fixé

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

À la limite quand $n \rightarrow +\infty$ (x fixe)

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{par cv simple}$$

$$f_n(a) \longrightarrow f(a) \quad "$$

$$f'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cv sur } [a, n]} g$$

$$\text{donc } \int_a^x f'_n(t) dt \longrightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

$$\underline{\text{Donc:}} \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

où g continue par transfert de continuité

$$\text{Donc } f'(x) = g(x)$$

1.9 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I intervalle, à valeurs dans F , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j ,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k ,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $(f_n^{(k)})_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que g_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $(f_n)_n$ et la convergence uniforme de toutes les $(f_n^{(j)})_n$, pour $j \geq 1$.

2 Séries de fonctions

2.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $A \subset E \rightarrow F$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in A$ fixé, la série vectorielle $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{aligned} S : A &\rightarrow F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.

- En cas de convergence simple sur I , on note :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur A .

- On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geq n_0$.

2.2 Convergence uniforme

$\|\cdot\|_F$

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $A \subset E \rightarrow F$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur A** si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur A .

Remarque. On peut quantifier la définition par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in A, \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } A \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } A \text{ vers } 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_\infty(S - S_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ N_\infty(R_n) \end{aligned}$$

$$\text{où } N_\infty(R_n) = \sup_{x \in A} \|R_n(x)\|_F$$

$$(F, \|\cdot\|_F)$$

$$(B(A, F), N_\infty)$$

2.3 Convergence normale

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $A \subset E \rightarrow F$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement** sur A si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } A \text{ pour tout } n \\ \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- On rappelle que $N_\infty(f) = \sup_{x \in A} (\|f(x)\|_F)$. Le premier point permet de garantir l'existence de $N_\infty(f_n)$.
- On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geq n_0$.
- Le second point est la convergence d'une série **numérique**.
- La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum N_\infty(f_n)$.

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $A \subset E \rightarrow F$.

S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, \|f_n(x)\|_F \leq \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente, alors $\sum f_n$ converge normalement.

Proposition. La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

Preuve:

$$\begin{aligned} f_n &: A \longrightarrow F \\ x &\longmapsto f_n(x) \end{aligned}$$

$$N_\infty(f_n) = \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|_F$$

- Soit $x \in A$ fixé.

$$\|f_n(x)\|_F \leq N_\infty(f_n)$$

↑ t.g. série convergente

donc $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge

si $\sum f_n(x)$ converge absolument

donc $\sum f_n(x)$ converge car F de dim finie

- Montrons la convergence uniforme.

Pour tout n ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^p f_k(x) \right\|_F &\leq \sum_{k=n+1}^p \|f_k(x)\|_F \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p N_\infty(f_k) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} N_{\infty}(f_k) \quad \text{indép de } p$$

À la limite, pour $p \rightarrow +\infty$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(n) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} N_{\infty}(f_k) \quad \text{indép de } n$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ comme reste
d'une série cv.

donc $\sum f_n$ cv uniformément.

2.4 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $A \subset E \rightarrow F$.

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur A (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est continue sur A ,

alors :

- S est continue sur A .

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact $K \subset A$, et si les f_n sont continues sur A , alors S est continue sur tout $K \subset A$ donc sur A .

Exemple.

- $\exp : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Pour E espace vectoriel de dimension finie, $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire. Une série entière $\sum a_n z^n$ de variable complexe, dont le rayon de convergence est R :

- converge normalement sur tout disque $D(0, r)$ où $r < R$;
- a une somme continue sur $D(0, R)$.

Preuve: Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$

$$\begin{aligned} \text{On note } f_n : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto \frac{1}{n!} A^n \end{aligned}$$

Alors $\exp$ est la somme de la série $\sum f_n$.

$$N_\infty(f_n) = \sup_{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\|$$

On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative

On travaille sur le compact $B_F(0, R)$

* les f_n sont continues sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ par

récurance sur n , avec la continuité

des produits matriciels qui est bilinéaire

* $\forall p \in \mathbb{N}$ $\sum f_n$ converge uniform sur $BF(0, R)$

$$\forall A \in BF(0, R)$$

$$\|f_n(A)\| = \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\|$$

$$= \frac{1}{n!} \|A^n\|$$

$$\leq \frac{1}{n!} \|A\|^n \quad \begin{array}{l} \text{par récurrence,} \\ \text{par sous-multiplicative} \end{array}$$

$$\leq \frac{1}{n!} R^n \quad \text{indép de } A$$

$$\text{donc } N_{\infty}^{BF(0, R)}(f_n) \leq \frac{1}{n!} R^n$$

$\uparrow$
tg série exp cv.

donc $\sum f_n$ cv uniform, donc uniform sur $BF(0, R)$

Par transfert de continuité, exp est continue sur

tout $BF(0, R)$, donc sur $M_p(\mathbb{K})$

Utilisation :

$$\exp(M+H) \xrightarrow{H \rightarrow 0} \exp(M) \quad \text{par continuité}$$

2.5 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $A \subset E \rightarrow F$ et a adhérent à A .
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur A (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a ,

alors :

- la série (vectorielle) $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a ,
- cette limite est égale à ℓ .

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

2.6 Primitivation, intégration terme à terme sur un segment et convergence uniforme

Lemme. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans F . Soit $a \in I$. Pour tout n , on note G_n la primitive de f_n qui s'annule en a .
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$ (on note S sa somme),

alors :

- la série $\sum G_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} G_n$ est la primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ qui s'annule en a .

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans F .
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt$

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.

2.7 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I , à valeurs dans F .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur I ,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- pour tout x : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f'_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

2.8 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I à valeurs dans F , et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geq 1$.

Exemple.

- Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $t \mapsto A \exp(tA) = \exp(tA)A$.
- Pour E espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $t \mapsto \exp(tu)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $t \mapsto u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$.

Remarque. On retiendra :

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA) = \exp(tA)A$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(tu)) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

On note $f(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$f_n(t) = \frac{t^n}{n!} A^n$$

- On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative

(par ex $\|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$ convient)

- A fixé, $\|f_n(t)\| \leq \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n$ par ric
 $\uparrow$ t.g. série exp convergente.

donc $\sum f_n$ est absolument dans $M_p(\mathbb{K})$ de
dim finie, donc $\sum f_n$ converge simplement.

• Les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} t^{n-1} A^n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} A^{n-1} A & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

• Pour $t \in [-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$

$$\|f_n'(t)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \alpha^{n-1} \|A\|^{n-1} \|A\| & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

↑
indép de t
A.g. d'une série exp. convergente

donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément
sur $[-\alpha, \alpha]$.

Par le th de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout
 $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.

Et

$$\forall t \quad f'(t) = f_0'(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} A^{n-1} A \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} (tA)^n A \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n \right) A \quad \downarrow ? \\
&= \exp(tA) \cdot A
\end{aligned}$$

Par les sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n!} (tA)^n A \right) = \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (tA)^n \right) A$$

par bilinéarité du produit.

On passe à la limite par $N \rightarrow +\infty$, en utilisant

la continuité du produit, qui bilinéaire en dim finie.

S70

$$E = \mathbb{R}[X]$$

$$\|P\| = \max_k |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Convergence de $\sum \frac{1}{2^n} X^n$?

- $\left\| \frac{1}{2^n} X^n \right\| = \frac{1}{2^n}$ t.g. série cv
donc $\sum \frac{1}{2^n} X^n$ converge absolument.

Or $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie, donc
on ne peut pas en déduire la cv de la série

- On suppose que $\sum \frac{1}{2^n} X^n$ converge.

On note S sa somme : $S = a_0 + a_1 X + \dots + a_s X^s$

$$\left\| S - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} X^k \right\| \quad \text{où } n \geq s+1$$

$$= \left\| (a_0 - 1) + (a_1 - \frac{1}{2})X + \dots + (a_s - \frac{1}{2^s})X^s - \frac{1}{2^{s+1}}X^{s+1} + \dots \right\|$$

$$\geq \frac{1}{2^{s+1}} \quad \text{car } > 0$$

0 $\leftarrow n \rightarrow \infty$

- Par l'absurde On suppose $\sum \frac{1}{2^n} x^n$ converge.

donc

$$\underline{\left(1 - \frac{x}{2}\right) \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} x^n \longrightarrow 1}$$

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} x^n - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2^n} x^n$$

$\swarrow N \rightarrow \infty$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{2^{N+1}} x^{N+1}}$$

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) S(x)$$

par continuité du produit.

$$\text{où } S(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$\parallel \parallel = \frac{1}{2^{N+1}} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow N \rightarrow \infty$$

$$x^0$$